

Průsečík přímky a kružnice s CAS Maxima

Zadání

Je dána kružnice $k : (x - m)^2 + (y - 1)^2 = 16$ a přímka $p : x - 3y + 6 = 0$. Určete hodnotu parametru m , aby přímka p byla tečnou ke kružnici k .

Teorie

Kružnice je zadána ve středovém tvaru, ze kterého pohodlně přečteme souřadnice středu $[m;1]$ a poloměr přímky $r = 4$. Střed má tedy neznámou x -souřadnici (je dána parametrem m). Přímka je zadána obecnou rovnicí.

Abychom našli m (x -souřadnici středu), budeme hledat průsečíky k a p tak, aby existoval právě jeden (tzn. přímka s kružnicí mají jeden společný bod, je to tečna). Řešíme proto soustavu rovnic přímky a kružnice a hledáme společný bod $[x;y]$.

Není nutné celou soustavu dořešit, stačí si uvědomit, že chceme, aby měla právě jedno řešení, proto ve chvíli, kdy dostáváme kvadratickou rovnici, stačí vzít její diskriminant a položit ho roven nule (je-li diskriminant nula, vyjde právě 1 řešení). Dořešíme jen rovnici s diskriminantem a dostáváme hodnoty parametru m .

Řešení

Spustíte program wxMaxima a začnete psát (i když nikde neblíká kurzor, to nevadí) nebo pište do okna [online verze](#). Pokud používáte program wxMaxima, musíte za každým příkazem stisknout **Shift+Enter**, aby se vykonal!

Příkaz wxMaxima	Vysvětlení	Postup
k: (x-m)^2+(y-1)^2=16;	Vkládáme rovnici kružnice a pojmenováváme ji k.	Zadáváme rovnice do programu.
p: x-3*y+6=0;	Vkládáme rovnici přímky a pojmenováváme p.	
solve([k,p],[x,y]);	Necháváme program vyřešit soustavu rovnic k, p vzhledem k neznámým x a y, m je tedy parametr. Všimneme si, že x ₁ a x ₂ , stejně jako y ₁ a y ₂ se liší přičtením či odečtením výrazu pod odmocninou (diskriminant), ten by tedy měl být 0. Zkusíme si nejprve vyřešit soustavu „ručně“ dosazovací metodou.	

Příkaz wxMaxima	Vysvětlení	Postup
<code>solve(p,y);</code>	Necháme „vyřešit“ přímku p pro proměnnou y s „parametrem“ x neboli necháme vyjádřit z rovnice přímky p neznámou y vzhledem k x .	Vyřešíme soustavu rovnic k a p dosazovací metodou, dosazením za y z rovnice přímky.
<code>rhs(%[1]);</code>	Zobrazíme si jen pravou stranu rovnice, která nám vyšla, to dělá funkce <code>rhs()</code> . symboly <code>%[1]</code> říkají, že z předchozího výsledku, kterým byl (jednoprvkový) seznam (má hranaté závorky) bereme hned první (a zde jedinou) položku.	
<code>subst(%,y,k);</code>	Substituujeme (dosazujeme) do rovnice k místo neznámé y hodnotu předchozího výsledku (znak %). Pokud něco nefunguje, můžeme rovnou místo znaku % napsat $(x+6)/3$.	
<code>expand(%)</code> ;	Roznásobíme předchozí rovnici.	
<code>%-16</code>	Od předchozího výsledku odečteme 16, abychom dostali na levé straně kvadratický trojčlen a na pravé straně rovnice nulu.	Máme kvadratickou rovnici pro x vzhledem k m . Jelikož ale nepotřebujeme znát hodnotu x , ale pouze zajistit, aby mělo jediné řešení, budeme dále určovat diskriminant kvadratické rovnice tak, aby byl roven 0.
<code>lhs(%)</code> ;	Zobrazíme si jen levou stranu rovnice, tj. pouze kvadr. trojčlen.	
<code>ratcoef(%,x,2);</code>	Z předchozího výsledku (znak %) si zobrazíme koeficient pro x v 2. mocnině.	
<code>let(a,%o10);</code>	Nastavíme program, že má písmeno a později substituovat hodnotou výsledku na řádku 10 (znaky <code>%o10</code>), tj. předchozí výsledek. Pozor, nelze použít znak %, výraz se bude vyhodnocovat až ve chvíli samotného substituování!	
<code>ratcoef(%o9,x,1);</code>	Z výsledku na řádku 9 (znak <code>%o9</code> , řádek s kvadratickým trojčlenem) si zobrazíme koeficient pro x v 1. mocnině.	
<code>let(b,%o12);</code>	Nastavíme program, že má písmeno b později substituovat hodnotou výsledku na předchozím řádku (<code>%o12</code>).	
<code>ratcoef(%o9,x,0);</code>	Z výsledku na řádku 9 si zobrazíme koeficient pro absolutní člen (x v 0. mocnině)-	
<code>let(c,%o14);</code>	Nastavíme program, že má písmeno c později substituovat hodnotou výsledku na předchozím řádku (<code>%o14</code>).	
<code>letsimp(b^2-4*a*c);</code>	Necháme vypsát vzorec pro diskriminant, funkce <code>letsimp</code> do něj dosadí za neznámé a , b a c dříve nastavené hodnoty.	
<code>%=0;</code>	V předchozím řádku určený diskriminant položíme roven nule.	Máme rovnici diskriminantu rovnu nule, hledáme pro jaká m bude nula a tudíž vyjde jediný průsečík přímky s kružnicí.

Příkaz wxMaxima	Vysvětlení	Postup
<code>solve(%) ;</code>	Necháme vyřešit rovnici v předchozím řádku.	Program našel 2 možné hodnoty parametru m . máme řešení.

Bude-li $m = \pm 4\sqrt{10} - 3$, bude se kružnice dotýkat přímky.

Můžeme ještě spočítat souřadnice tečného bodu:

Příkaz wxMaxima	Vysvětlení	Postup
<code>rhs(%[1]) ;</code>	příkaz rhs vybere jen pravou stranu rovnice, %[1] říká první část ze seznamu posledního výsledku.	Zobrazíme hodnotu m_1 .
<code>subst(%,m,k) ;</code>	Substituujeme (dosadíme) předchozí výsledek za parametr m do rovnice kružnice.	Dosadíme za parametr do kružnice.
<code>solve([%,p],[x,y]) ;</code>	Vyřešíme soustavu rovnic, první je předchozí výsledek (kružnice s dosazeným parametrem), druhá je přímka, hledáme neznámé x a y .	Hledáme průsečík kružnice a přímky pro první hodnotu parametru m .
<code>rhs(%o18[2]) ; subst(%,m,k) ; solve([%,p],[x,y]) ;</code>	Výsledek pro druhou hodnotu parametru m_2 dostaneme analogicky, nejprve zobrazujeme druhou hodnotu (jen pravou stranu) z výsledku na řádku 18.	Dopočítáme tečný bod pro druhou hodnotu parametru.

Celý výpočet pro program wxMaxima si můžete [stáhnout](#). Otevřete nové okno a po načtení klikněte v menu na „Cell“ → „Evaluate All Cells“. Nezapomeňte, že při opakovaném provedení příkazu (stisku Shift+Enter) znamená znak % v příkazu vždy výsledek naposledy provedeného výpočtu, nikoliv předchozího řádku. Při opakovaném provedení se také mění čísla řádků, takže nemusí odpovídat správně očíslování např. %o18.

Exportovanou podobu v HTML najdete na [stránkách prof. Rýdla](#).

From:

<https://www.gml.cz/wiki/> - GMLWiki

Permanent link:

<https://www.gml.cz/wiki/doku.php/matematika:software:maxima:prusecikprimkyakruznice>



Last update: 18. 09. 2015, 13.04