

Důkaz vzorce pro součet n členů aritm. posl.

Pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti platí tvrzení:



Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická posloupnost a $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ je součet jejích první n členů.

Pak platí: $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

Důkaz povedeme matematickou indukcí.

I. - důkaz pro $n=1$

Dokážeme platnost tvrzení pro nejnižší možné n .

Z předpokladů tvrzení výše máme, že: $s_1 = a_1$. Dosazením do dokazovaného vzorce

$$s_1 = \frac{1}{2}(a_1 + a_1) = a_1. \text{ Tvrzení pro } n=1 \text{ tedy platí.}$$

II. - indukční krok

Nyní předpokládáme, že tvrzení (vzorec) je pravdivé pro $n=k$, kde k je libovolné přirozené číslo. Víme, že minimálně jedno takové existuje a sice $k=1$ pro ostatní to zatím nevíme. Nyní dokážeme, že jestliže platí tvrzení pro k , pak platí také pro $k+1$. Jinak řečeno dokazujeme platnost vzorce pro $k+1$ tak, že do něj aplikujeme vzorec pro k (který je z předpokladu správný), abychom dosáhli pravdivého tvrzení.

Předpoklad: $s_k = \frac{k}{2}(a_1 + a_k)$ platí.

Dokazujeme, že platí $s_{k+1} = \frac{k+1}{2}(a_1 + a_{k+1})$

Upravím si levou stranu, abych mohl aplikovat předpoklad:

$$s_k + a_{k+1} = \frac{k+1}{2}(a_1 + a_{k+1}).$$

$$\text{Aplikuji: } \frac{k}{2}(a_1 + a_k) + a_{k+1} = \frac{k+1}{2}(a_1 + a_{k+1})$$

Vynásobím 2 a roznásobím závorky:

$$ka_1 + ka_k + 2a_{k+1} = ka_1 + a_1 + ka_{k+1} + a_{k+1}$$

Odečtu ka_1 a přepíšu a_{k+1} jako $a_k + d$, protože jde o aritmetickou posloupnost.

$$ka_k + 2a_k + 2d = a_1 + ka_k + kd + a_k + d$$

Odečtu, co lze: $a_k = a_1 + kd - d$, tedy $a_k = a_1 + (k-1)d$

Toto tvrzení je známý vzorec pro n -tý člen aritmetické posloupnosti, neboli je to pravdivé tvrzení. Tím

je důkaz dokončen.

Shrnutí

Nejprve jsme dokázali, že pro $n=1$ je tvrzení pravdivé. Pak jsme dokázali, že pokud je tvrzení platné pro nějaké k , musí být platné i pro $k+1$. Takovým nějakým k je třeba číslo 1, ale z toho tedy plyne, že to platí i pro 2. Jestliže platí pro 2, pak platí pro 3. Jestliže pro 3 platí, pak platí pro 4... Neboli platí pro jakékoliv n ...

From:
<https://old.gml.cz/wiki/> - GMLWiki

Permanent link:
<https://old.gml.cz/wiki/doku.php/matematika:posloupnosti:dukazsoutunclenu?rev=1448994321>

Last update: **01. 12. 2015, 19.25**

