

Písemka na opakování Analytické geometrie, Oktáva 2015/2016

Skupina A

Příklad 1

Určete obecnou rovnici přímky p tak, aby byla rovnoběžná s přímkou q : $x=1+3k$, $y=2+k$ a procházela bodem $A[1;2]$.

Obecná rovnice přímky je rovnice $ax + by + c = 0$, kde koeficienty a a b jsou dány normálovým vektorem přímky (vektorem kolmým na směr přímky), tedy $\vec{n} = (a; b)$ zadává směr přímky a koeficient c určuje umístění přímky v prostoru.

Přímka p rovnoběžná s q musí mít stejný směr (normálový vektor), jen jiné umístění. Přímka q je zadaná parametricky, máme tedy její směrový vektor, jehož složky tvoří násobky koeficientu k . Je tedy $\vec{s}_q = (3; 1)$.

Hledáme normálový vektor, který je k \vec{s}_q kolmý. Jedním z možných kolmých vektorů je $\vec{n}_q = (-1; 3)$. Jelikož $p \parallel q$, musí $\vec{n}_q = \vec{n}_p$. Dosadíme do rovnice: $-x + 3y + c = 0$. Směr přímky je určen, umístění v prostoru určuje podmínka, že $A \in p$. Dosadíme bod A do rovnice a dopočítáme koeficient c . $-1 + 3 \cdot 2 + c = 0$, tedy $c = -5$.

Řešení: $p : -x + 3y + -5 = 0$

Poznámka: bylo také možné si všimnout, že bod $[1;2]$ leží na přímce q , jelikož je přímo zadaný v jejím parametrickém vyjádření, takže stačilo převést q do obecného tvaru, jelikož $p=q$.

Příklad 2

Určete vzdálenost přímky p : $x=3k$, $y=2-2k$ od bodu $[3;2]$.

Přímka je zadaná parametrickou rovnicí. Existuje vzorec pro vzdálenost bodu od přímky, kde do levé strany obecné rovnice přímky dosadíme souřadnice bodu a podělíme délkou normálového vektoru přímky, z výsledku bereme absolutní hodnotu (vzdálenost nemůže být záporná).

$$d(A; p) = \frac{|a \cdot x_A + b \cdot y_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ pro } A[x_A; y_A], p: ax + by + c = 0$$

Převědeme rovnici na obecnou buď sečtením tak, aby se odečetla k , nebo nalezením kolmého vektoru ke směrovému a dosazením bodu. Každopádně: $2x + 3y - 6 = 0$. Dosazením do vzorce získáváme, že délka je přibližně 1,66.

Kdo si nepamatuje vzorec, ví, že vzdálenost bodu od přímky je délka úsečky dané oním bodem a patou kolmice z bodu vedené k přímce. Určíme tedy kolmici k procházející bodem $A=[3;2]$, například obecnou rovnicí. Jelikož směrový vektor kolmice k musí být kolmý na směrový vektor přímky p a směrový a normálový vektor téže přímky jsou na sebe kolmé, pak normálový vektor kolmice k může být totožný se směrovým vektorem přímky p . Proto $3x - 2y + c = 0$. Dosazením bodu A dostáváme koeficient c a tedy $k: 3x - 2y - 5 = 0$.

Stejně dobře bylo možné si říci, že směrový vektor přímky k kolmý na směrový vektor přímky p je třeba $(2;3)$ a proto parametrická rovnice kolmice je $k: x = 3 + 2k, y = 2 + 3k$.

Tak jako tak najdeme průsečík $k \cap p$ pomocí soustavy dvou rovnic pro přímky p a k . Bod $P = [\frac{27}{13}; \frac{8}{13}]$;

Stačí určit $|AP| = \sqrt{(3 - \frac{27}{13})^2 + (2 - \frac{8}{13})^2} \doteq 1,66$

Příklad 3

Určete odchylku přímky $p: x=1-k, y=3-3k$ od $q: x=k, y=-3k$

Pro odchylku přímek využijeme odchylku jejich směrových nebo normálových vektorů. Jelikož jsou přímky obě zadané parametricky, bude výhodnější určit odchylku směrových vektorů. Potřebujeme vzorec pro skalární součin:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$$

Měli bychom také vědět, jak se počítá skalární součin: $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$, pro vektory $\vec{u} = (u_1; u_2)$ a $\vec{v} = (v_1; v_2)$.

Z parametrického vyjádření víme, že $\vec{s}_p = (-1; -3), \vec{s}_q = (1; -3)$. Počítáme:

$$-1 + 9 = \sqrt{10} \cdot \sqrt{10} \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{8}{10}$$

$$\alpha \doteq 36^\circ 52''$$

From:

<https://old.gml.cz/wiki/> - **GMLWiki**

Permanent link:

<https://old.gml.cz/wiki/doku.php/matematika:analytgeom:opakovacipisemka>

Last update: **08. 09. 2015, 08.38**

