DUM č. 19 v sadě

14. Ma-2 Příprava k maturitě a PZ – geometrie, analytická geometrie, analýza, komlexní čísla

Autor: Magda Krejčová

Datum: 13.08.2013

Ročník: maturitní ročníky

Anotace DUMu: Matematická analýza: derivace funkce, průběh funkce - sada úloh s výsledky.

Matematická analýza: derivace funkce, průběh funkce

Derivace funkce v bodě

Je-li funkce f definována v okolí bodu x_0 a existuje-li limita $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, nazýváme ji derivací funkce f v bodě x_0. Značíme ji $f'(x_0)$.

Geometrický význam derivace funkce v bodě: $f'(x_0)$ odpovídá směrnici tečny s bodem dotyku $T[x_0, f(x_0)]$.

Derivace jako funkce

Je-li f funkce, která má derivaci $f'(x_0)$ v každém bodě x_0 jisté množiny $M \in D_f$, potom je na množině M definována funkce, která každému $x_0 \in M$ přiřazuje právě jedno číslo $f'(x_0)$. Tuto funkci značíme f', je to derivace funkce f, chápaná jako funkce.

Věty o derivacích funkcí

V1: Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci, je v tomto bodě spojitá.

V2: Vzorce pro derivace základních elementárních funkcí:

$f(x) =$	$f'(x) =$	Podmínky platnosti
c	0	$x \in (-\infty; +\infty)$
$x^n \ (n \in N)$	$n \cdot x^{n-1}$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$x^k \ (k \in Z)$	$k \cdot x^{k-1}$	$x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
$x^r \ (r \in R)$	$r \cdot x^{r-1}$	$x \in (0; +\infty)$
e^x	e^x	$x \in (-\infty; +\infty)$
a^x	$a^x \ln a$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$x \in (0; +\infty)$
$\log a^x (a > 0)$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$x \in (0; +\infty)$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$tg\ x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right) + k\pi \ k \in Z$
$\cot g\ x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$x \in (0; \pi) + k\pi \ k \in Z$

V3: Jestliže funkce *u, v* mají derivaci v každém bodě $x \in M$, pak vzorce pro derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu těchto funkcí platí pro všechna $x \in M$ (u podílu za předpokladu, že $g(x) \neq 0$) a stručně je zapisujeme takto:

a) $(u+v)' = u' + v'$

b) $(u-v)' = u' - v'$

c) $(u \cdot v)' = u'v + uv'$

d) $(c \cdot u)' = c \cdot u' \; c \in R$

e) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \; v \neq 0$

V4: Jestliže je dána složená funkce je dána složená funkce $F(x) = f(g(x))$, přičemž vnitřní funkce g má derivaci v každém bodě $x \in M$ a vnější funkce f má derivaci f' odpovídajícím bodě $u = g(x)$, pak složená funkce $F = f(g(x))$ má derivaci F' v každém bodě $x \in M$, pro niž platí $F'(x) = f'(u) \cdot g'(x)$.

1. Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = x^2 - x + 1$ v bodě *T*[-2; *y*]. Určete vzájemnou polohu grafu funkce a tečny.
   Řešení:
   $5x + y + 4 = 0$ *graf funkce je nad tečnou*

2. Zderivujte funkce:

   a) $f(x) = \frac{1 + x - x^2}{1 - x + x^2}$

   b) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

   c) $f(x) = x^2 \cdot \cot g\, x$

   d) $f(x) = \frac{1 + e^x}{1 - e^x}$

   e) $f(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$

   f) $f(x) = x \cdot \log x$

Řešení:

a) $f'(x)=\dfrac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$

b) $f'(x)=\cos 2x$

c) $f'(x)=\dfrac{x(\sin 2x-x)}{\sin^2 x}$

d) $f'(x)=\dfrac{1}{1-\sin x}$

e) $f'(x)=\dfrac{2e^x}{(1-e^x)^2}$

f) $f'(x)=\log x+\dfrac{1}{\ln 10}$

3. Zderivujte složené funkce a upravte:

a) $f(x)=\cos^2 3x$

b) $f(x)=\sin^3(5x-3)$

c) $f(x)=\ln(\sin x)$

d) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{(1-x)^2}$

e) $f(x)=\ln\dfrac{e^x}{x^2+1}$

f) $f(x)=\sqrt{\sin x\cdot\cos x}$

g) $f(x)=\dfrac{1}{3e^x}$

h) $f(x)=e^{\cos x}$

i) $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$

j) $f(x)=e^{x-x^2}$

Řešení:

a) $f'(x) = -3\sin 6x$

b) $f'(x) = 15\sin^2(5x-3)\cos(5x-3)$

c) $f'(x) = \cot g\, x$

d) $f'(x) = \dfrac{2(x+1)}{(1-x)^3}$

e) $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$

f) $f'(x) = \dfrac{\cos 2x}{\sqrt{2\sin 2x}}$

g) $f'(x) = -\dfrac{1}{3}e^{-x}$

h) $f'(x) = -\sin x \cdot e^{\cos x}$

i) $f'(x) = -\dfrac{1}{x\ln^2 x}$

j) $f'(x) = (1-2x)\cdot e^{x-x^2}$

Využití diferenciálního počtu k vyšetřování průběhu funkce

V1: Nechť funkce f má v každém bodě $x \in (a;b)$ derivaci $f'(x)$.Pak platí:

a) Je-li $f'(x) > 0$ pro každé $x \in (a;b)$, je funkce f rostoucí na $(a;b)$.

b) Je-li $f'(x) < 0$ pro každé $x \in (a;b)$, je funkce f klesající na $(a;b)$.

V2: (nutná podmínka pro lokální extrém - Fermatova věta)

Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém a existuje-li v tomto bodě derivace $f'(x_0)$, pak je $f'(x) = 0$.

V3: (postačující podmínka pro lokální extrém)

Nechť x_0 je bod, ve kterém $f'(x) = 0$. Je-li funkce f spojitá v nějakém okolí bodu x_0 a má-li derivaci v každém bodě $x \neq x_0$ tohoto okolí, pak:

a) jestliže znaménko derivace $f'(x)$ se mění v bodě x_0 ze záporného na kladné (z kladného na záporné) má funkce v bodě x_0 ostré lokální minimum (ostré lokální maximum).

b) jestliže v bodě x_0 nemění $f'(x)$ znaménko, nemá funkce f v bodě x_0 lokální extrém.

4. Zjistěte, ve kterých intervalech roste a ve kterých klesá funkce, jestliže $f(x) = 5x^6 - 6x^5 - 15x^4$.
   Řešení:
   roste v $\langle -1;0 \rangle \cup \langle 2;+\infty)$, *klesá v* $(-\infty;-1\rangle \cup \langle 0;2 \rangle$

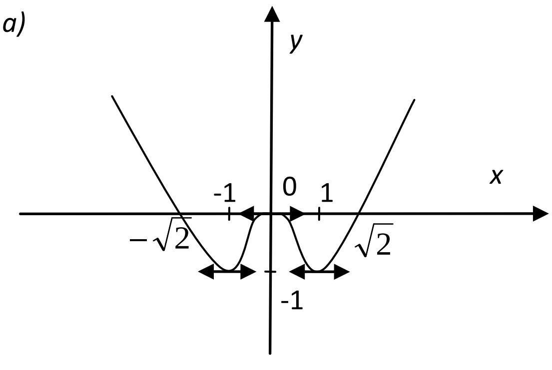
5. Načrtněte graf funkce f, znáte-li $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:
   a) $f(x) = x^4 - 2x^2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

   b) $f(x) = x^3 - 3x - 2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

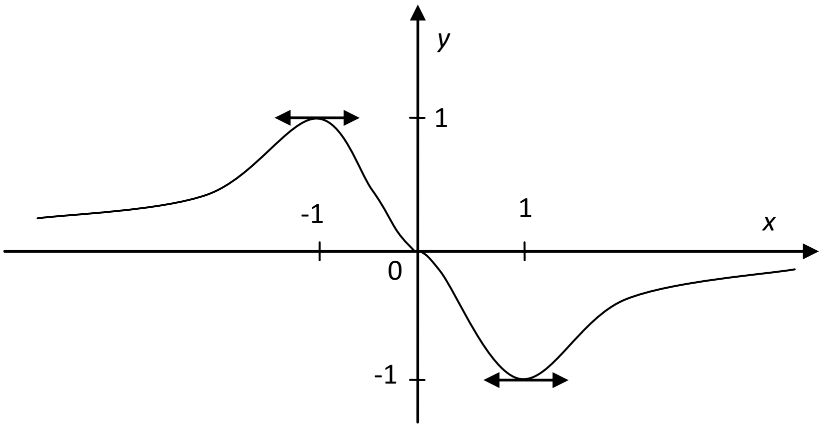
   c) $f(x) = \dfrac{-2x}{1+x^2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

   Řešení:

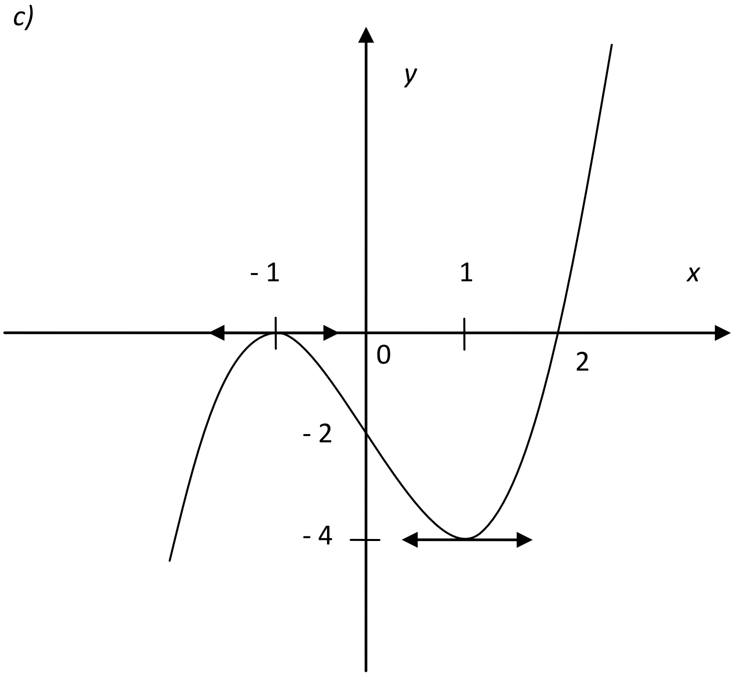
   a)



b)



c)



Literatura:

Sbírka příkladů z matematiky k přijímacím zkouškám na VŠE
Marta Rosická a Lada Eliášová
ISBN 80-86119-62-9

Matematika – příklady pro přijímací zkoušky
RNDr. Petr Rádl a kolektiv
ISBN 80-7157-625-5