DUM č. 20 v sadě

13. Ma-1 Příprava k maturitě a PZ – algebra, logika, teorie množin, funkce, posloupnosti, řady, kombinatorika, pravděpodobnost

Autor: Jarmila Šimečková

Datum: 23.01.2014

Ročník: maturitní ročníky

Anotace DUMu: Posloupnosti - geometrická posloupnost, nekonečná geometrická řada: teorie, sada úloh s výsledky na procvičení.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

<u>Název DUMu</u>**: Ma-1 Příprava k maturitě a PZ – algebra, logika, teorie množin, funkce, posloupnosti, řady, kombinatorika, pravdepodobnost**
<u>Autor</u>: Jarmila Šimečková
<u>Datum</u>: 23.1.2014
<u>Ročník</u>: maturitní seminář 4.A, 4.B, 8.AV, 6.AF, 6.BF
<u>Anotace DUMu</u>: posloupnosti – geometrická posloupnost, nekonečná geometrická řada, soubor příkladů s výsledky na procvičení.

20. Posloupnosti: geometrická posloupnost, nekonečná geometrická řada.

Geometrická posloupnost

je každá posloupnost určená rekurentně vztahy $b_1 = b,\ b_{n+1} = b_n \cdot q$
pro všechna $n \in N$, kde b, q jsou daná čísla.
Číslo q se nazývá **kvocient** geometrické posloupnosti.

Věty o vlastnostech geometrických posloupností

Pro každou geometrickou posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ platí:

- n-tý člen lez vyjádřit vzorcem
$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$
- pro libovolné dva členy b_r, b_s geometrické posloupnosti platí:
$$b_s = b_r \cdot q^{s-r}$$
- pro součet S_n prvních členů geometrické posloupnosti platí:
$$S_n = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \qquad \text{, je-li } q \neq 1$$
$$S_n = n \cdot b_1 \qquad \text{, je-li q=1}$$

Nekonečná geometrická řada

Def.: Je-li $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ geometrická posloupnost, výraz,
který obsahuje její členy $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ a má tvar <u>$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$</u> se nazývá <u>nekonečná geometrická řada.</u>

Poznámka: Je třeba si uvědomit, že nekonečná řada není běžným součtem reálných čísel, protože ten je definován jen pro konečný počet sčítanců.

Věta: Je-li $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ geometrická posloupnost s kvocientem q, pak nekonečná geometrická řada
$b_1 + b_1q + \dots + b_1q^{n-1} + \dots$
je pro $|q| < 1$ konvergentní a její součet $S = \dfrac{b_1}{1-q}$.

$$\left(\lim_{n\to\infty} b_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{b_1}{1-q} \qquad \text{protože} \qquad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \ \text{ pro } |q| < 1 \right)$$

Příklady:

1) (MZLU) V geometrické posloupnosti určete první člen a_1, je-li dáno:

$$a)\ a_{16} = \frac{1}{8},\ a_{21} = 4$$

$$b)\ a_{22} = \frac{1}{4},\ a_{27} = \frac{1}{128}$$

$$c)\ a_5 = -54,\ a_8 = -1458$$

$$d)\ a_3 = -243,\ a_6 = -9$$

$$Výsledky:\quad a)\ a_1 = \frac{1}{2^{18}}\quad b)\ a_1 = 2^{19}\quad c)\ a_1 = -\frac{2}{3}\quad d)\ a_1 = -3^7$$

2) (MZLU) V geometrické posloupnosti určete S_n, je-li dáno:

$$a)\ a_1 = 3,\ q = 2,\ a_n = 384$$

$$b)\ a_1 = -2,\ q = 3,\ a_n = 86$$

$$c)\ a_1 = 1,\ q = \frac{1}{2},\ a_n = \frac{1}{64}$$

$$d)\ a_1 = 1,\ q = \frac{1}{3},\ a_n = \frac{1}{81}$$

$$Výsledky:\quad a)\ S_8 = 765\quad b)\ S_6 = -728\quad c)\ S_7 = \frac{127}{64}\quad d)\ S_5 = \frac{121}{81}$$

3) (MZLU) Je-li dána posloupnost geometrická, určete S_5 :

$$a)\ \left\{\frac{1}{2^{n-1}\cdot 3}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$b)\ \left\{\frac{2^n}{3^{n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$c)\ \left\{\frac{2^n+1}{3^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$d)\ \left\{\frac{1}{3^{n-1}\cdot 2}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$Výsledky:\quad a)\ \frac{31}{48}\quad b)\ \frac{422}{729}\quad c)\ -\quad d)\ \frac{121}{162}$$

4) (MZLU) Vypočtěte:

$a)\ 2^x - 2^{x-1} + 2^{x-2} - 2^{x-3} + ... =$

$b)\ 3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + ... =$

$c)\ \log x + \log\sqrt{x} + \log\sqrt[4]{x} + \log\sqrt[8]{x} + ... =$

$d)\ x^5 \cdot \sqrt{x^5} \cdot \sqrt[4]{x^5} \cdot \sqrt[8]{x^5} \cdot \sqrt[16]{x^5} \cdot ...... =$

$e)\ \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[8]{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[16]{x}} \cdot ..... =$

$Výsledky:\quad a)\ 2^x \cdot \frac{2}{3} \quad b)\ 3^x \cdot \frac{3}{2} \quad c)\ 2\log x \quad d)\ x^{10} \quad e)\ \frac{1}{x}$

5) (MZLU) Řešte v oboru **R** rovnici:

$a)\ \frac{x}{10} + \frac{x}{100} + \frac{x}{1000} + \frac{x}{10000} + ... = \frac{2}{3}$

$b)\ x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}x - .... = 6$

$c)\ \frac{x}{3} + \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{24} + ... = 5$

$d)\ x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}x + \frac{1}{27}x + ... = 6$

$e)\ \frac{2}{3}x + \frac{4}{9}x + \frac{8}{27}x + \frac{16}{81}x + ... = \frac{1}{4}$

$Výsledky:\quad a)\ x = 6 \quad b)\ x = 9 \quad c)\ x = \frac{15}{2} \quad d)\ x = 4 \quad e)\ x = \frac{1}{8}$

6) (VŠE) V geometrické posloupnosti je dáno $a_1 = 32,\ q = \frac{1}{2},\ a_n = \frac{1}{4}$. Určeme $n,\ S_n$.

$n = 8, \quad S_n = \frac{255}{4}$

28) (VŠE) Napišme první čtyři členy geometrické posloupnosti, ve které je

$a_1 = \frac{x}{2}, \quad a_2 = 2x^3 \quad (x \neq 0).$

$a_1 = \frac{x}{2}, \quad a_2 = 2x^3, \quad a_3 = 8x^5, \quad a_4 = 32x^7$

7) (VŠE) V geometrické posloupnosti je dáno $a_n = -2, \quad a_{n+2} = -32$. Vypočtěme q, a_{n-1}, a_{n+3}.

---

2 řešení:

1. $q = 4, \quad a_{n-1} = -\frac{1}{2}, \quad a_{n+3} = -128$
2. $q = -4, \quad a_{n-1} = \frac{1}{2}, \quad a_{n+3} = 128$

8) (VŠE) Stanovme první člen a kvocient geometrické posloupnosti, platí-li:

$$\begin{aligned} a_3 + a_4 + a_7 &= 5 \\ a_4 + a_5 + a_8 &= 15 \end{aligned}.$$

$a_1 = \frac{1}{153}, \quad q = 3$

9) (VŠE) Délky hran kvádru tvoří tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Jaké jsou jejich délky, je-li jejich součet 42 cm a jedna z hran má délku b = 8 cm.

---

a = 2, b = 8, c = 32

10) (VŠE) Přičteme- li k číslům $x = 4, \ y = 16, \ z = 100$ stejné číslo, dostaneme první tři členy geometrické posloupnosti. Určete v této posloupnosti S_4 .

800

11) (VŠE) V geometrické posloupnosti určené n-tým členem a_n určete člen a_{n+1}, kvocient q a množinu všech $x \in R$, pro která platí $|q|$ < 1 je-li:

a) $a_n = \frac{x \cdot 2^n}{(x-1)^{n-1}}$

b) $a_n = \sin^{n+1} x$

---

a) $q = \frac{2}{x-1}, \quad x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$

b) $q = \sin x, \quad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \wedge k \in Z$

12) (VŠE) Mezi čísla 2 a 486 vložte čtyři čísla tak, aby spolu danými čísly vzniklo šest po sobě jdoucích členů geometrické posloupnosti. Určete je.

2, 6, 18, 54, 162, 486

13) (VŠE) Velikosti hran kvádru tvoří tři po sobě jdoucí členy geometrické členy. Jejich součet je roven 13. Jak velký je jeho objem je- li povrch $S = 78\ cm^2$?

$V = 27cm^3$

14) (VUT) Napište prvních 5 členů posloupnosti $\left\{\frac{5 \cdot c^{n+2}}{2}\right\}$ $c \in R$ a rozhodněte, zda je tato posloupnost geometrická.

$\frac{5}{2}c^3, \frac{5}{2}c^4, \frac{5}{2}c^5, \frac{5}{2}c^6, \frac{5}{2}c^7$ je geometrická

15) (VUT) Bakterie se množí půlením tak, že za příznivých podmínek dojde k dělení vždy za půl hodiny. Kolik bakterií vznikne za 6 hodin z jedné bakterie?

$2^{12} - 1$

<u>Literatura</u>:

1) Sbírka příkladů z matematiky k přijímacím zkouškám na VŠE, autoři: Marta Rosická a Lada Eliášová, ISBN 80-86119-62-9
2) Matematika – příklady pro přijímací zkoušky, RNDr.Petr Rádl a kolektiv, ISBN 80-7157-625-5