DUM č. 19 v sadě

13. Ma-1 Příprava k maturitě a PZ – algebra, logika, teorie množin, funkce, posloupnosti, řady, kombinatorika, pravděpodobnost

Autor: Jarmila Šimečková

Datum: 23.01.2014

Ročník: maturitní ročníky

Anotace DUMu: Posloupnosti - obecné vlastnosti (včetně jejich důkazu matematickou indukcí), aritmetická posloupnost: teorie, sada úloh na procvičení s výsledky.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název DUMu: **Ma-1 Příprava k maturitě a PZ – algebra, logika, teorie množin, funkce, posloupnosti, řady, kombinatorika, pravdepodobnost**
Autor: Jarmila Šimečková
Datum: 16.1.2014
Ročník: maturitní seminář 4.A, 4.B, 8.AV, 6.AF, 6.BF
Anotace DUMu: posloupnosti – definice, vlastnosti,limita posloupnosti, věty o limitách, soubor příkladů s výsledky na procvičení.

19. Posloupnosti : obecné vlastnosti (včetně jejich důkazů matematickou indukcí), Aritmetická posloupnost

Funkce, jejímž definičním oborem je množina N všech přirozených čísel, se nazývá **posloupnost**. Funkční hodnoty posloupnosti se nazývají členy posloupnosti. Funkční hodnota posloupnosti v bodě $n \in N$ se nazývá *n*-tý člen posloupnosti a značí se místo $f(n)$ pravidla u_n, v_n, a_n, b_n apod.

Funkční přepis posloupnosti $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ je zpravidla zadán jedním z těchto dvou způsobů:
a) vzorcem pro *n*-tý člen u_n, např. $u_n = 2n$, $u_n = 3n - 1$
b) rekurentně zadáním prvního členu posloupnosti nebo několika prvních členů posloupnosti a vzorcem, podle něhož lze určit postupně další členy, např. $u_1 = 4 \quad u_{n+1} = u_n - 2$
Grafem posloupnosti je vždy množina navzájem izolovaných bodů.

Posloupnost $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá
Shora omezená posloupnost, existuje-li takové číslo $h \in R$, že $u_n \le h$ pro každé $n \in N$
Zdola omezená posloupnost, existuje-li takové číslo $h \in R$, že $u_n \ge h$ pro každé $n \in N$
Omezená posloupnost, je-li omezená shora i zdola
Rostoucí posloupnost, je-li $u_{n+1} > u_n$ pro každé $n \in N$.
Klesající posloupnost, je-li $u_{n+1} < u_n$ pro každé $n \in N$
Neklesající posloupnost, je li $u_{n+1} \ge u_n$ pro každé $n \in N$
Nerostoucí posloupnost, je li $u_{n+1} \le u_n$ pro každé $n \in N$
Rostoucí, klesající, neklesající a nerostoucí posloupnosti nazývváme souhrnně monotónními posloupnostmi .

Limita posloupnosti

Říkáme, že reálné číslo l je limita posloupnosti $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ se členy $u_n \in R$, právě když ke každému (jakkoli malému) číslu $\varepsilon > 0$ existuje přirozené číslo n_0 takové, že pro všechna $n \ge n_0$ je $u_n \in (l - \varepsilon; l + \varepsilon)$ čili platí nerovnost $|u_n - l| \langle \varepsilon$.

Skutečnost, že posloupnost $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu $l \in R$, vyjadřuje zápisem $\lim_{n\to\infty} u_n = l$

Poslouplosti, které mají vlastní limitu (l je konečné číslo) se nazývají **konvergentní posloupnosti.** Posloupnosti, jež nejsou konvergentní, se nazývají **divergentní posloupnosti** (divergují k + ∞ nebo - ∞ a nebo jsou oscilující).

Věty o limitách posloupností

V1: Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.
V2: Každá konvergentní posloupnost je omezená.
V3: Každá monotónní omezená posloupnost je konvergentní.
V4: Nechť posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ jsou konvergentní a c je libovolné reálné číslo. Pak jsou konvergentní i posloupnosti , $(a_n + b_n)_{n=1}^{+\infty}$, $(a_n - b_n)_{n=1}^{+\infty}$, $(c \cdot a_n)_{n=1}^{+\infty}$, je-li $b_n \neq 0$ je konvergentní také posloupnost $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=1}^{+\infty}$ a platí:

$$a)\ \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$b)\ \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$c)\ \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$d)\ \lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$c)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \quad \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

Aritmetická posloupnost

je každá posloupnost určená rekurentně vztahy $a_1 = a,\ a_{n+1} = a_n + d$ pro všechna $n \in N$, kde *a*,*d* jsou daná čísla. Číslo *d* se nazývá **diference** aritmetické posloupnosti.

Věty o vlastnostech aritmetických posloupností:

Pro každou aritmetickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ platí:

- n-tý člen aritmetické posloupnosti lze vyjádřit vzorcem

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

- pro libovolné dva členy a_r, a_s aritmetické posloupnosti platí

$$a_s = a_r + (s-r) \cdot d$$

- pro součet S_n prvních n členů aritmetické posloupnosti platí

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1) \cdot d)$$

Příklady:

1)(VŠE) Napišme prvních sedm členů posloupnosti dané rekurentním vzorcem:

$a_{n+1} = 2a_n - 3a_{n-1},\ a_1 = 0,\ a_2 = 1$ / 0, 1 ,2, 1, -4, -11, -10

2) (VŠE) V posloupnosti definované rekurentním vzorcem vypočtěte a_1 a a_6.

$a_{n+1} = 2a_n - n \cdot a_{n-1},\ a_3 = 5,\ a_4 = 4$ $/ a_1 = -\frac{1}{2},\ a_6 = -44$

3) V posloupnosti $(nx + y)$ je $a_1 = 5,\ a_2 = 8$. Určeme čísla *x*, *y*. / *x=3*, *y=2*.

4) (VŠE) Dokažme, že posloupnost $\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$ je klesající.

5) (VŠE) Zjistěte, které z čísel 10, 35, 50 je členem posloupnosti (a_n), kde $a_n = 2n^2 - 3n$
. / 35

6) Posloupnost je definována rekurentně pro všechna $n \in N$ vztahem $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - 1$, první člen $u_1 = 1$. Dokažte matematickou indukcí a) $u_n \geq -5$ pro každé $n \in N$.

b) posloupnost (u_n) je klesající.

7)) Posloupnost je definována rekurentně pro všechna $n \in N$ vztahem $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 3}$, první člen $u_1 = 2$. Dokažte matematickou indukcí:

a) posloupnost (u_n) je shora omezená číslem 4

b) posloupnost (u_n) je rostoucí.

8) (VŠE) V aritmetické posloupnosti je $a_1 = 3,\ d = 2$. Určeme všechna přirozená *n*, pro která platí $S_n \geq 120$. / $n \geq 10$

9) (VŠE) V aritmetické posloupnosti platí $a_1 + a_5 = -8,\quad a_2 + a_6 = -4$. Napište prvních pět členů této posloupnosti. / -8, -6, -4, -2, 0

10) (VŠE) Určete a_1 a d v aritmetické posloupnosti, ve které platí

$a_1 + a_7 = 22,\quad a_3 \cdot a_4 = 88$. / $a = 2.\ d = 3$

11) (VŠE) Mezi kořeny kvadratické rovnice $x^2 - 2x - 120 = 0$ vložte deset čísel tak, aby spolu s těmito kořeny vzniklo prvních dvanáct členů aritmetické posloupnosti. Určete a_1 a d.

$a_1 = -10, d = 2 \quad nebo \quad a_1 = 12, d = -2$

12) (VŠE) V aritmetické posloupnosti, kde $a_1 = 20, d = -4$ najděte člen, který se rovná jedné čtrnáctině součtu všech předcházejících.

$a_5 = 4 \; nebo \; a_{36} = -120$

13) (MZLU)V aritmetické posloupnosti určete první člen, je-li dáno:

1. $a_{14} = 3, a_{23} = 21$
2. $a_9 = 6, a_{15} = -8$
3. $a_{11} = 9, a_{19} = 33$
4. $a_7 = 22, a_{14} = 15$

$Výsledky: \quad 1.\ a_1 = -23 \quad 2.\ a_1 = \frac{74}{3}$

$3.\ a_1 = -21 \quad 4.\ a_1 = 28$

14) (MZLU)V aritmetické posloupnosti je dáno :

$a) \quad a_{18} = 4, d = -1/5,$ určete S_{18}

$b) \quad a_{22} = -2/3, d = -1,$ určete S_{22}

$c) \quad a_{19} = -1/4, d = 2,$ určete S_{19}

$d) \quad a_{21} = 2, d = -1/8,$ určete S_{21}

$e) \quad a_2 = 8, a_{15} = 73,$ určete S_{15}

$f) \quad a_2 = 18, a_{17} = -87,$ určete S_{17}

$g) \quad a_1 = 4, a_{20} = -110,$ určete S_{21}

$h) \quad a_1 = -3, a_{40} = 153,$ určete S_{41}

$Výsledky: \quad a)\ S_{18} = \frac{513}{5} \quad b)\ S_{22} = \frac{649}{3} \quad c)\ S_{19} = -\frac{1387}{4} \quad d)\ S_{21} = \frac{273}{4} \quad e)\ S_{15} = 570$

$f)\ S_{17} = -527 \quad g)\ S_{21} = -1176 \quad h)\ S_{41} = 3157$

15) (MZLU)Je-li dána posloupnost aritmetická, určete d a S_{25} :

a) $\left\{\frac{1}{2}n+3\right\}_{n=1}^{\infty}$ d) $\left\{-\frac{2}{5}n\right\}_{n=1}^{\infty}$

b) $\left\{\frac{n+3}{5}\right\}_{n=1}^{\infty}$ e) $\left\{-n+\frac{1}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

c) $\left\{\frac{n+4}{-n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ f) $\left\{n^2-1\right\}_{n=1}^{\infty}$

$Výsledky:\quad a)\ S_{25}=\frac{475}{2}$

$b)\ S_{25}=80\quad c)-$

$d)\ S_{25}=-130\quad e)\ S_{25}=-\frac{625}{2}$

$f)-$

16) (MZLU) Určete součet všech sudých přirozených čísel menších než 150.
/5550

17) (MZLU) Určete součet všech lichých přirozených čísel menších než 150.
/5625

18) (MZLU) Určete součet všech přirozených dvojciferných čísel.
/4905

19) (MZLU) Určete součet všech přirozených trojciferných čísel. /494550

20) (MZLU) Určete součet všech dvojciferných přirozených čísel dělitelných pěti. /945

21) (MZLU) V aritmetické posloupnosti $a_1, a_2, \ldots.., a_7$, je $a_1=-\frac{11}{3}, d=\frac{4}{3}$.
Vypočtěte $(8)^{a_1}\cdot(8)^{a_2}\cdot(8)^{a_3}\cdot\ldots\ldots(8)^{a_7}$ $/\,2^7=128$

22) (MZLU) Vypočtěte, když i je imaginární jednotka: $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4\cdot\ldots\ldots i^{64}$ /1

23) (MZLU) Délky stran pravoúhlého trojúhelníku tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Určete délku přepony, když:

a) delší odvěsna je 12 cm
b) rozdíl délek odvěsen je 5 cm
c) kratší odvěsna je 6 cm

Výsledky: a) 15 cm
b) 25 cm
c) 10 cm

24)(VUT) Určete prvních 5 členů posloupnosti $\{3n-2\}$ a rozhodněte, zda je tato posloupnost aritmetická.

1,4,7,10,13 je aritmetická

Literatura:

1) Sbírka příkladů z matematiky k přijímacím zkouškám na VŠE, autoři: Marta Rosická a Lada Eliášová, ISBN 80-86119-62-9
2) Matematika – příklady pro přijímací zkoušky, RNDr.Petr Rádl a kolektiv, ISBN 80-7157-625-5