

DUM č. 13 v sadě

13. Ma-1 Příprava k maturitě a PZ – algebra, logika, teorie množin, funkce, posloupnosti, řady, kombinatorika, pravděpodobnost

Autor: Jarmila Šimečková

Datum: 05.06.2013

Ročník: maturitní ročníky

Anotace DUMu: Funkce - absolutní hodnota: definice, geometrický význam, vlastnosti, funkce s absolutní hodnotou, grafy, rovnice a nerovnice s absolutními hodnotami, sada úloh s výsledky

Materiály jsou určeny pro bezplatné používání pro potřeby výuky a vzdělávání na všech typech škol a školských zařízení. Jakékoliv další využití podléhá autorskému zákonu.



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Název DUMu: Ma-1 Příprava k maturitě a PZ – algebra, logika, teorie množin, funkce, posloupnosti, řady, kombinatorika, pravděpodobnost

Autor: Jarmila Šimečková

Datum: 20.12.2012

Ročník: maturitní seminář 4.A, 4.B, 8.AV, 6.AF, 6.BF

Anotace DUMu: Funkce - absolutní hodnota: definice, geometrický význam, vlastnosti, funkce s absolutní hodnotou, grafy, rovnice a nerovnice s absolutními hodnotami, sada úloh s výsledky

13.Funkce, rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou

Absolutní hodnota reálného čísla a:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0 \\ -a & \text{pro } a < 0 \end{cases}$$

Geometrický význam absolutní hodnoty:

$$|x-s| = r$$

Rovnice, nerovnice případně funkce s jednou absolutní hodnotou řešíme z definice absolutní hodnoty, s více absolutními hodnotami metodou nulových bodů.

Vlastnosti absolutních hodnot

Pro každé reálné číslo a platí:

1. $|a| \geq 0$, přičemž $|a| = 0$, právě když $a = 0$
2. $|-a| = |a|$
3. a) $|a| = r, r > 0$ právě když $a = r$ nebo $a = -r$
 b) $|a| < r, r > 0$, právě když $-r < a < r$
 c) $|a| > r, r > 0$, právě když $a > r$ nebo $a < -r$

pro každá dvě reálná čísla a,b platí

1. $|a \pm b| \leq |a| + |b|$
2. $|a \pm b| \geq ||a| - |b|| \geq |a| - |b|$
3. $|a - b| = |b - a|$
4. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
5. $\frac{|a|}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}$ pro $b \neq 0$

Příklady:

1) (VŠE) Řešte rovnice v R:

a) $1 - |x - 3| = x - 2$

b) $|x + 5| - |x - 2| = |x| - x + 7$

c) $|x| = |2x + 3| + x - 1$

d) $|3x - 1| - |2x + 3| = 0$

e) $x^2 = |1 - 2x^2|$

f) $|x + 3| - |x - 4| + 2|x - 6| = 1$

g) $|x + 1| + |2 - x| - |x + 3| = 4$

h) $x^2 + 1 = |x^2 - 3x + 1|$

Řešení: a) $(-\infty; 3)$ b) $(2; +\infty)$ c) $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ d) $\left\{-\frac{2}{5}; 4\right\}$

e) $\left\{\pm 1; \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$ f) nemá řešení g) $\{-2; 8\}$ h) $\{0\}$

2) (VŠE) Řešte rovnice v Z:

a) $|16 - 9x| - |9x - 5| = 11$

b) $|x^2 + 2x - 3| = 3 - 2x - x^2$

c) $\frac{1}{|x-1|} = x - 1$

Řešení: a) $\{\dots; -3; -2; -1; 0\}$ b) $\{-3; -2; -1; 0; 1\}$ c) $\{2\}$

3) (VŠE) Řešte rovnice v daném intervalu:

a) $2 \cdot |x - 3| + |6 - 2x| = |x + 7|$ v $(0; 3)$

b) $|x + 7| - |x - 4| = |6 - x|$ v $\langle -3; 3 \rangle$

c) $|2x + 1| - |x + 3| = 2 \cdot |1 - x| - 3$ v $\langle -3; 1 \rangle$

d) $|2x + 6| - |4 - 2x| + |x + 7| = 4$ v $\langle -2; 2 \rangle$

Řešení: a) $\{1\}$ b) $\{1\}$
c) $\left\{-3; \frac{1}{3}\right\}$ d) $\{-1\}$

4) (VŠE) Řešte v R x R soustavy rovnic:

a) $\begin{cases} |x - 3| + y = 4 \\ 2x - 5y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} |x - 1| + |y| = 2 \\ 3x - 7y = -5 \end{cases}$

Řešení: a) $\left\{[5; 2], \left[-\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right]\right\}$
b) $\left\{\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right], \left[\frac{8}{5}; \frac{7}{5}\right]\right\}$

5) (VŠE) V množině reálných čísel řešte nerovnice:

a) $|3 - x| \geq 6$

b) $|x| + |x - 1| \geq 2$

c) $2 \leq |x - 4| < 3$

d) $|1 - x| + |x| > -1$

e) $\frac{|2x - 2|}{2 - x} < 1$

f) $|x| \leq |x - 1|$

g) $\frac{1}{|x + 1|} \geq 3$

h) $\frac{1}{|x - 1|} \geq \frac{2}{|x - 2|}$

i) $\left| \frac{x}{x - 3} \right| \leq 1$

j) $\frac{3|x| - 2}{|x| + 1} \leq -1$

k) $\left| \frac{\log x - 1}{3} \right| \leq 2$

l) $\left| \log \frac{x}{2} - 1 \right| \geq 2$

m) $|\log x| > 1$

n) $0 < \frac{\log|x - 1| + 1}{2} \leq 1$

o) $-\log|x| > 2$

p) $2 \leq \log|1 - x| \leq 3$

q) $2 < \log|x| + 3 < 4$

r) $1 < \log \left| \frac{x + 1}{2} \right| \leq 3$

Řešení: a) $(-\infty; -3) \cup (9; +\infty)$ b) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$

c) $(1; 2) \cup (6; 7)$ d) $(-\infty; +\infty)$ e) $\left(0; \frac{4}{3}\right) \cup (2; +\infty)$

f) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ g) $\left(-\frac{4}{3}; -1\right)$ h) $\langle 0; 1 \rangle \cup \left(1; \frac{4}{3}\right)$ i) $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$

Řešení: j) $\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$ k) $\langle 10^{-5}; 10^7 \rangle$ l) $\left(0; \frac{1}{5}\right) \cup \langle 2000; +\infty \rangle$

m) $\left(0; \frac{1}{10}\right) \cup (10; +\infty)$

n) $\left(-9; \frac{9}{10}\right) \cup \left(\frac{11}{10}; 11\right)$ o) $(-0,01; 0) \cup (0; 0,01)$

p) $\langle -999; -99 \rangle \cup \langle 101; 1001 \rangle$ q) $(-10; -0,1) \cup (0,1; 10)$

r) $\langle -2001; -21 \rangle \cup (19; 1999)$

6)(MZLU) V oboru \mathbb{R} řešte nerovnice:

a) $|x-2| \geq x+1$

b) $|x-1| > 3x+1$

c) $|3x+3| \geq x+2$

d) $|2x+4|+x < 5$

e) $2|x+1| \leq x$

f) $x+|x-1| \geq 1$

g) $|2x|+1 > x+3$

h) $2+|x| \leq 3x+5$

i) $|x+3| \geq 1-2x$

j) $|6-3x| \leq 2+x$

k) $|x-3| > 2-x$

l) $|2-x| < x-3$

Řešení :

a) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ b) $(-\infty; 0)$ c) $\left(-\infty; -\frac{5}{4}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

d) $\left(-9; \frac{1}{3}\right)$ e) nemá řešení f) \mathbb{R}

g) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup (2; +\infty)$

h) $\left(-\frac{3}{4}; +\infty\right)$ i) $\langle -2; +\infty$

j) $\langle 1; 4$ k) \mathbb{R} l) nemá řešení

7) (MZLU) Nakreslete graf funkce $y = f(x)$ a určete průsečíky s osami souřadnic

a) $y = |x^2 - 4|$

b) $y = |1 - x^2|$

c) $y = |x| - 2$

d) $y = |x| + x$

e) $y = \frac{2|x|}{x}$

f) $y = |x-1|$

g) $y = 3 - |x|$

h) $y = |\log_3 x|$

i) $y = |2 \cos x|$

j) $y = |3 \sin x|$

k) $y = |\cos x| - 1$

l) $y = 2|\sin x|$

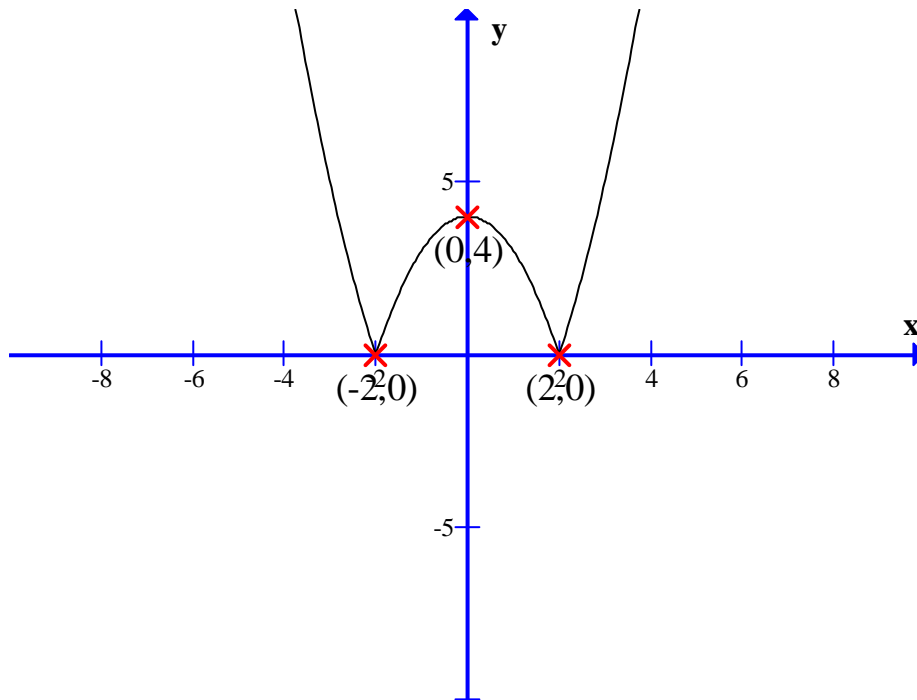
m) $y = |\cot gx|$

n) $y = -|tgx|$

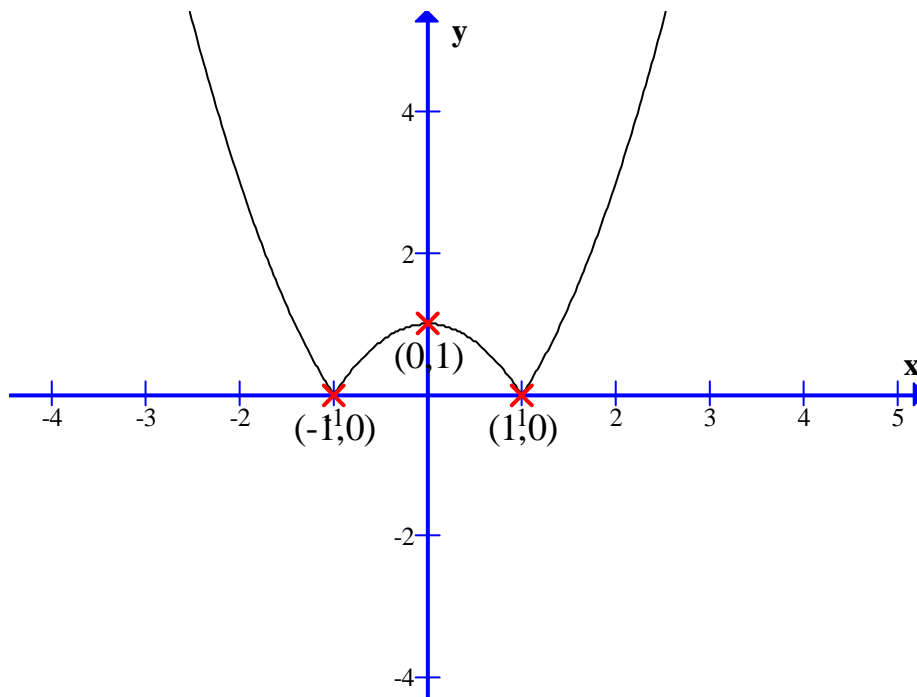
o) $y = -\left|\cot g \frac{x}{2}\right|$

p) $y = \left|tg \frac{x}{2}\right|$

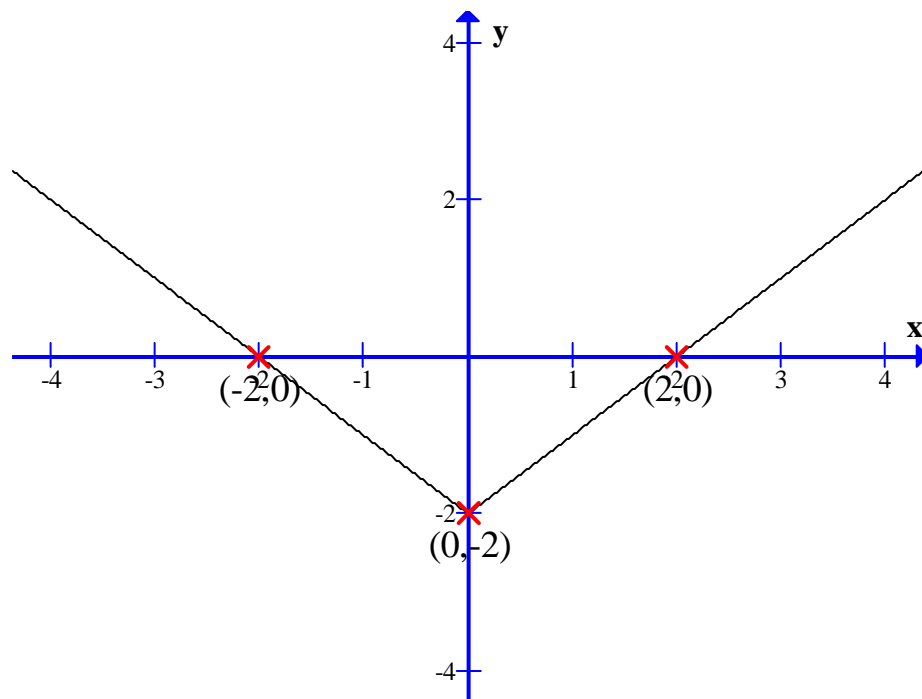
a)



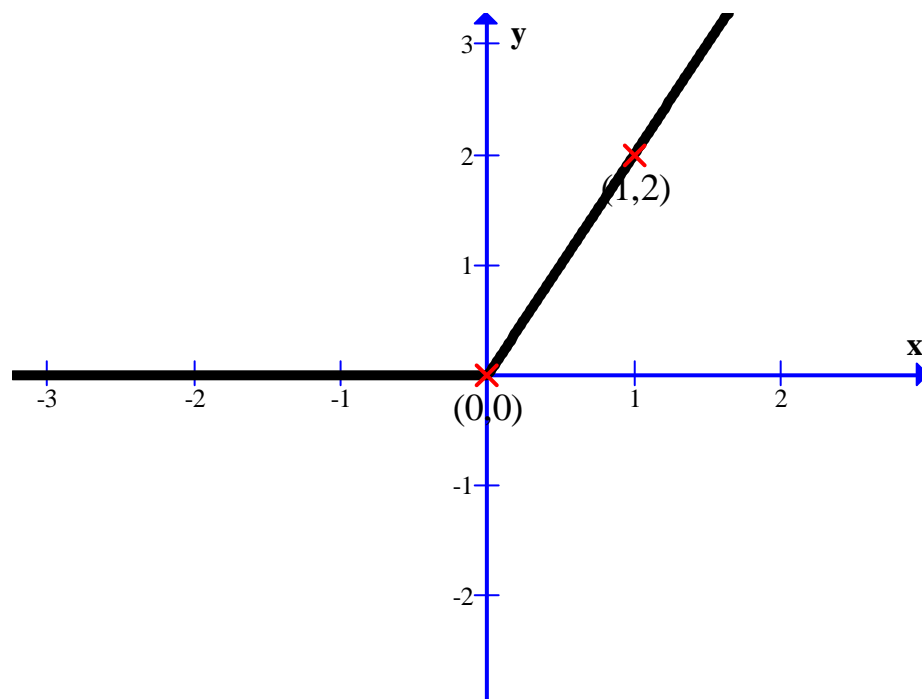
b)



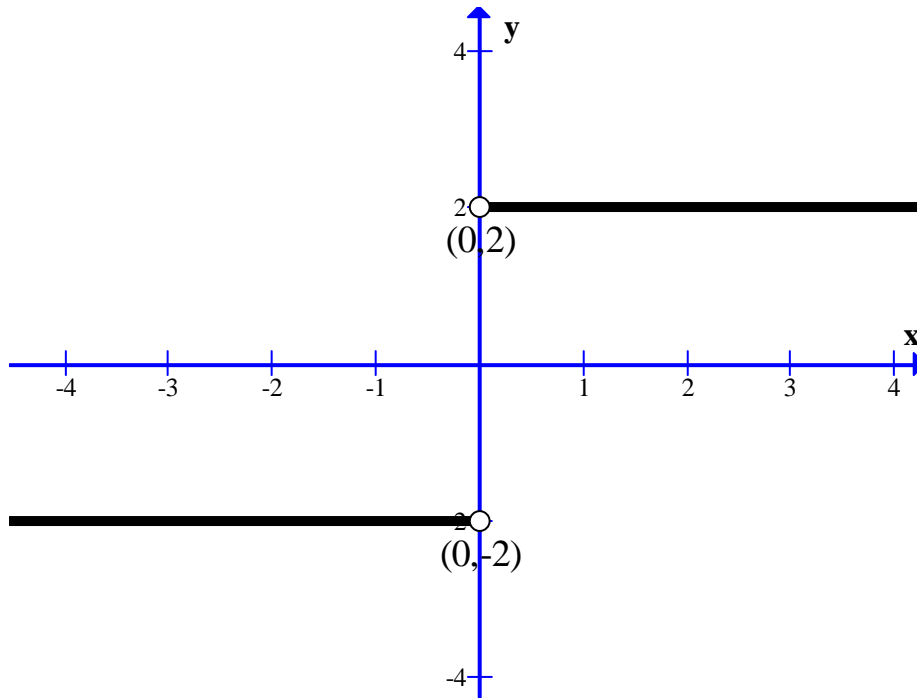
c)



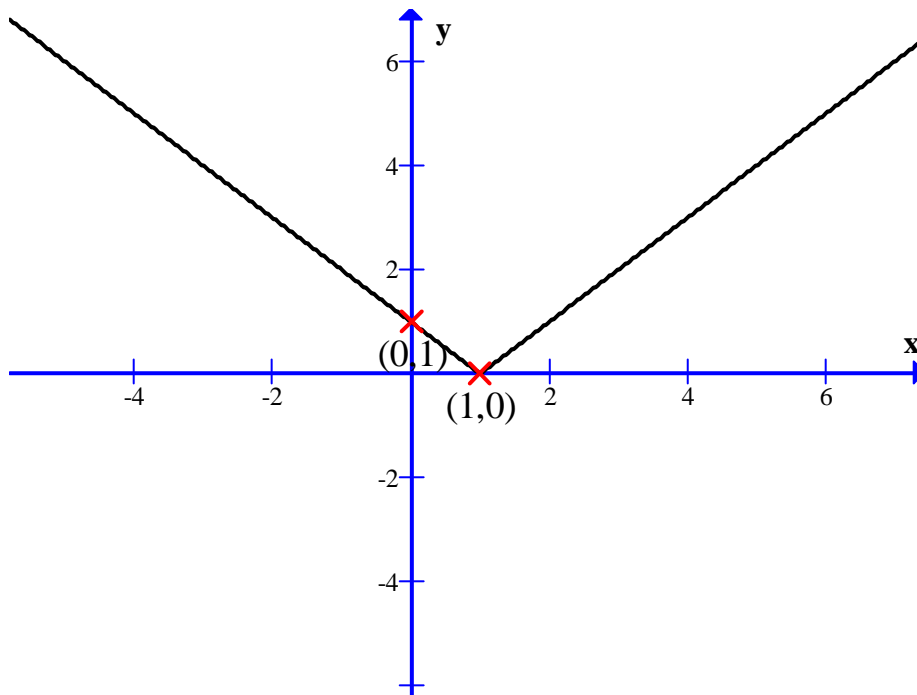
d)



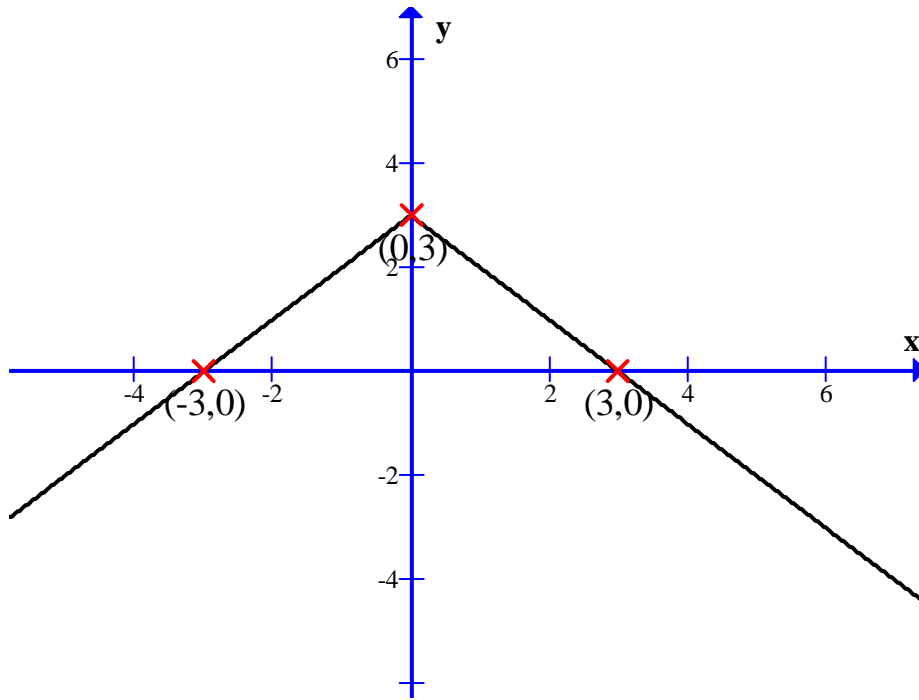
e)



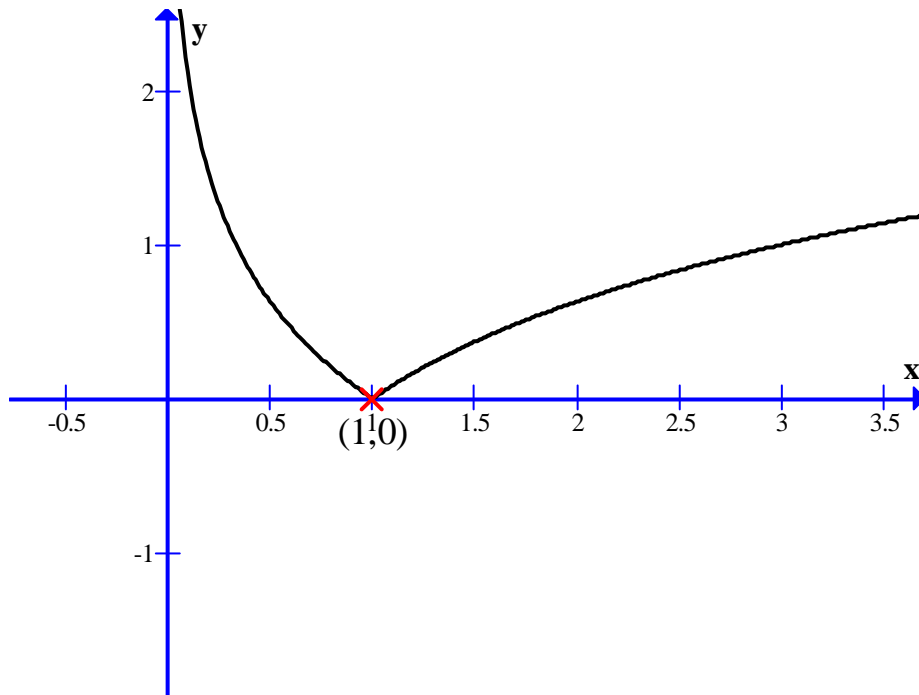
f)



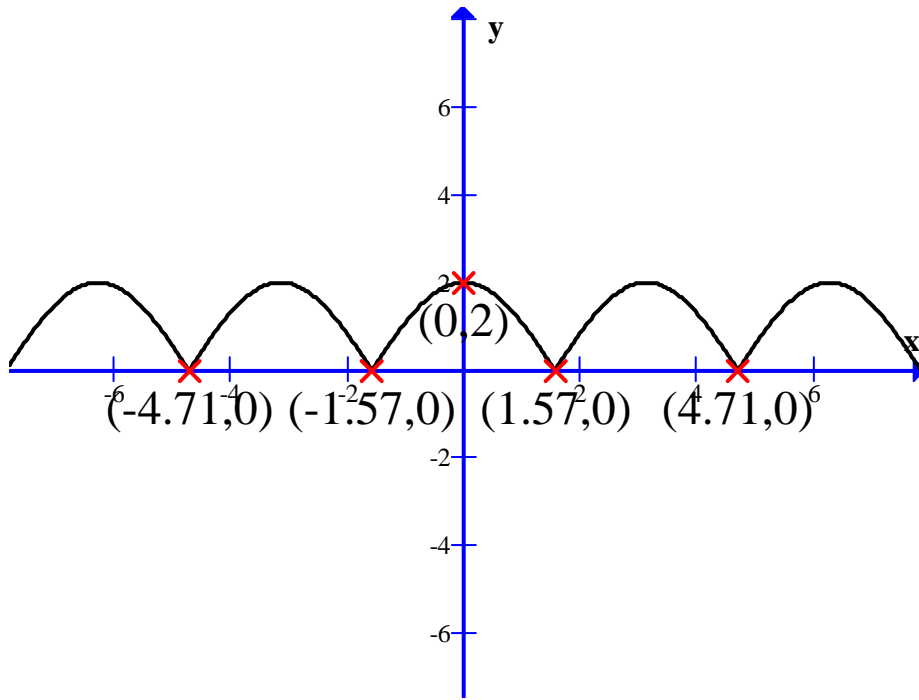
g)



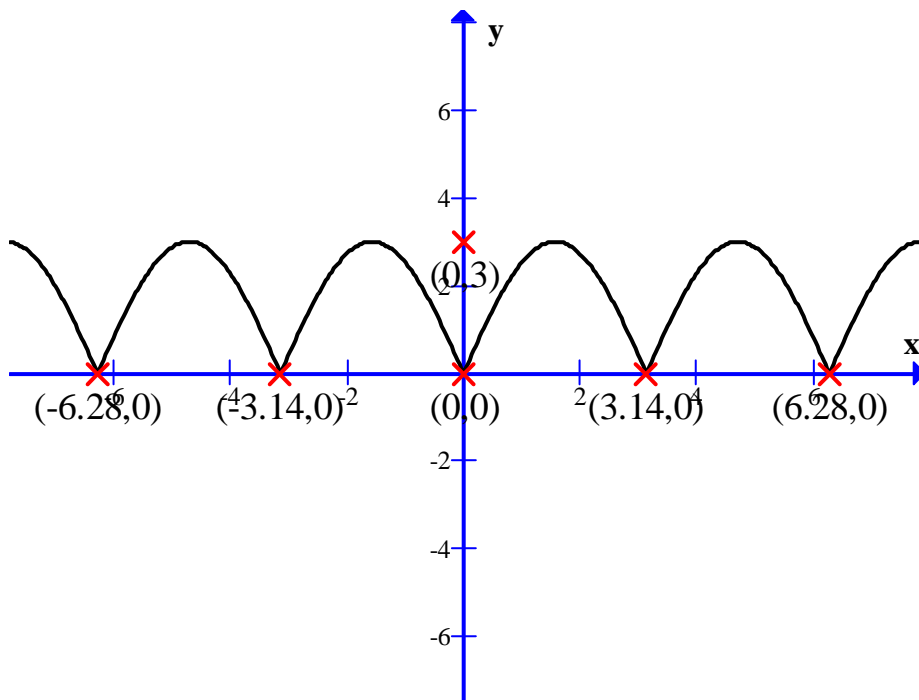
h)



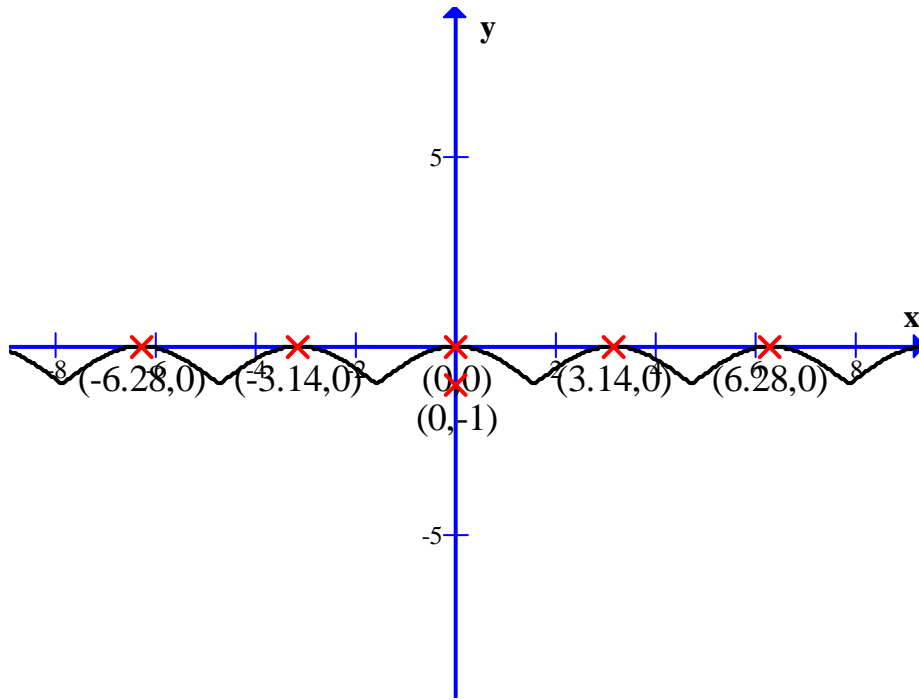
i)



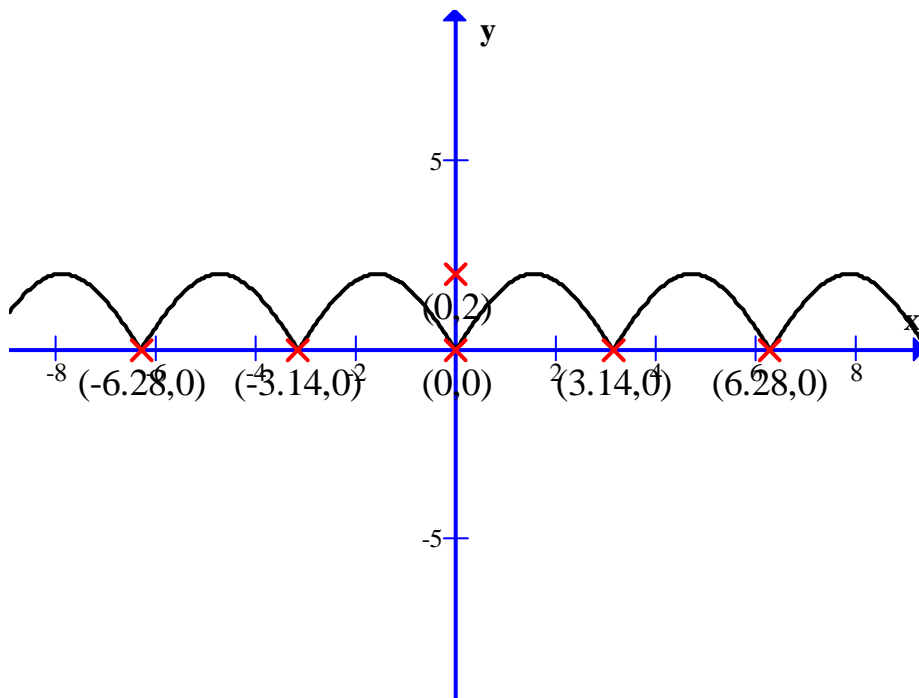
j)



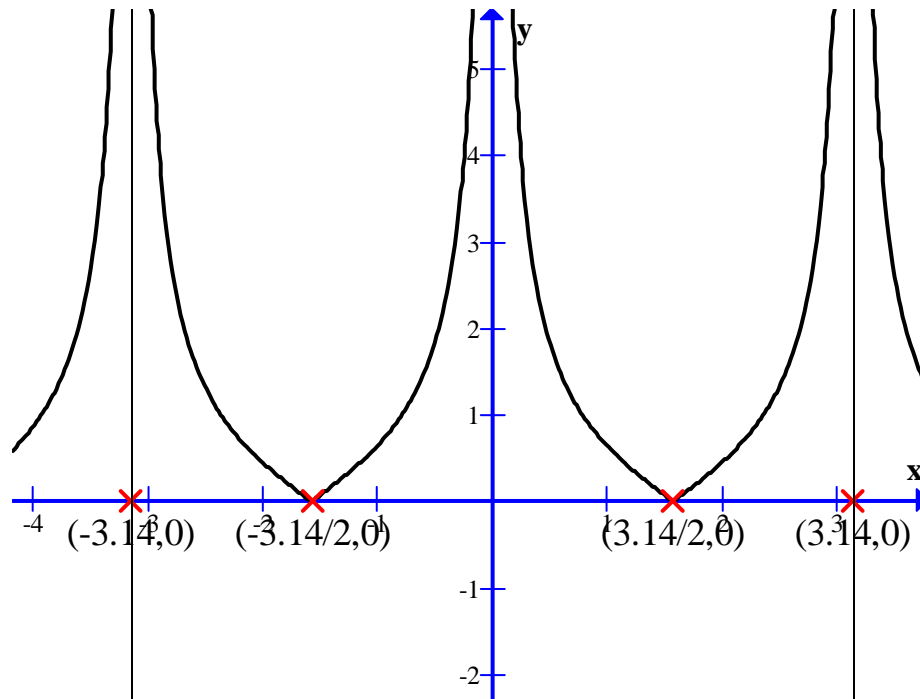
k)



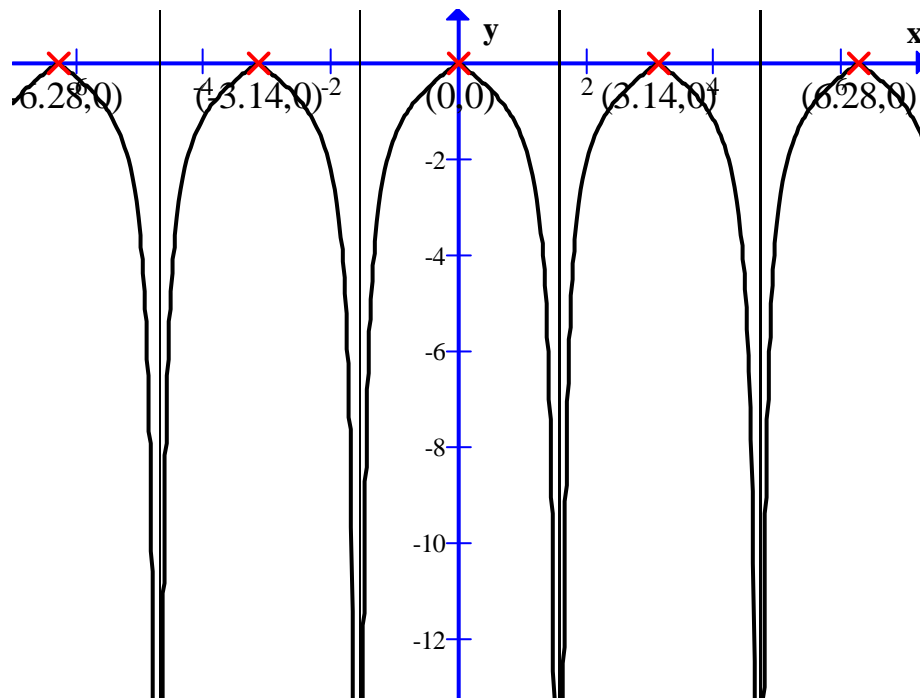
l)



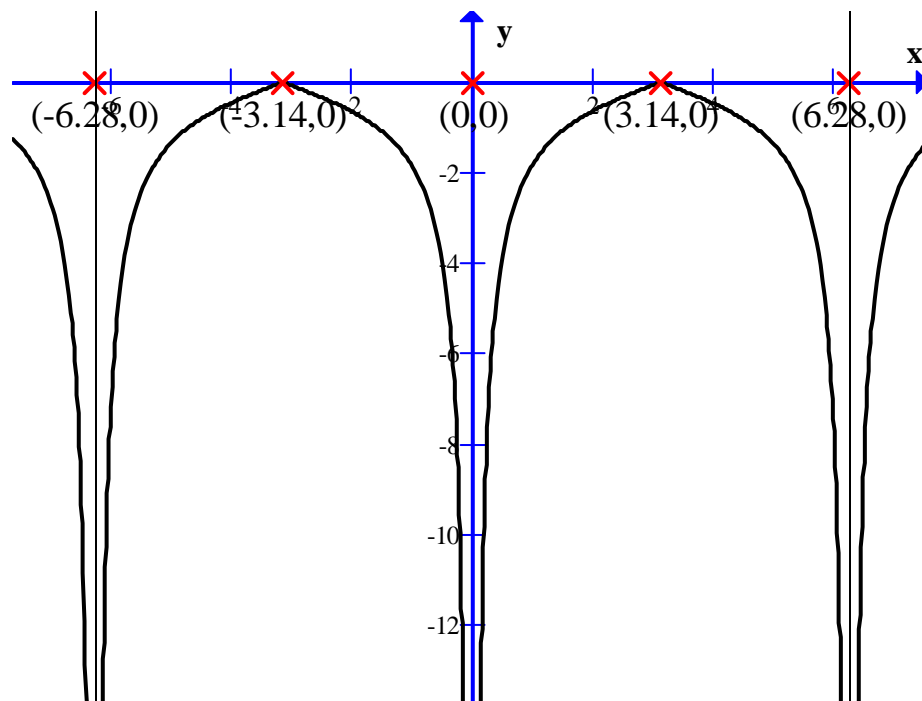
m)



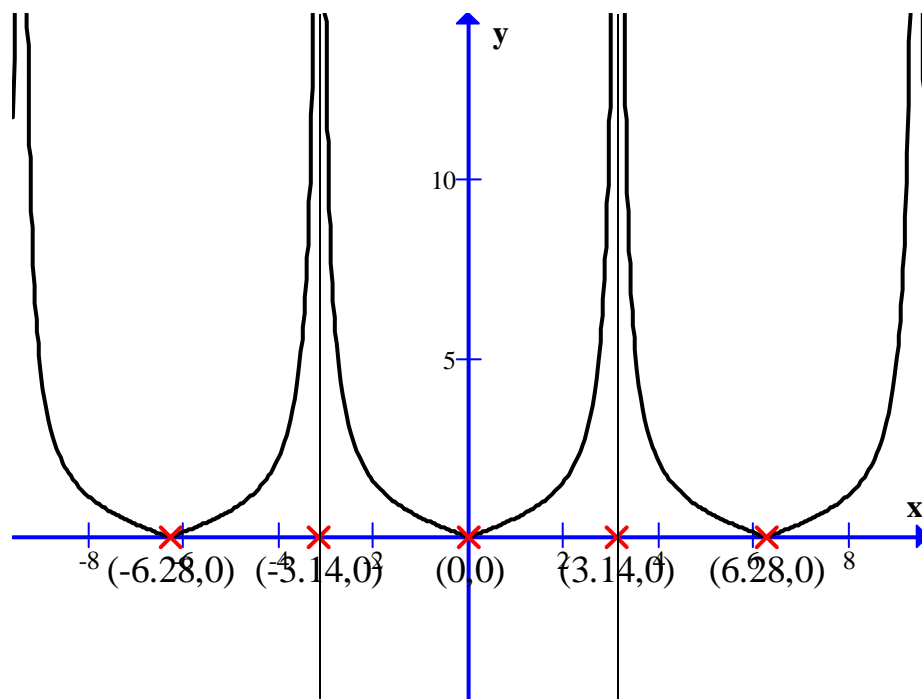
n)



o)



p)



8) (VŠE) Nakreslete graf funkce $y = f(x)$ v jejím definičním oboru

a) $y = \frac{|x| + x}{x}$

b) $y = x^2 - x \cdot |x - 2| - 4$

c) $y = 2 - |2 - x| - 2 \cdot |x + 4| - 3x$

d) $y = x^2 + 6|x| + 4$

e) $y = \frac{1}{|x| - 1}$

f) $y = |x - 1| - |x + 1|$

g) $y = \frac{2 \sin^2 x}{\sin x + |\sin x|}$

h) $y = ||x - 4| - 2|$

i) $y = |x^2 - 5x + 6|$

j) $y = x^2 - 5|x| + 6$

k) $y = |x^2 + 5x + 6|$

l) $y = x^2 + 5|x| + 6$

m) $y = |\cos x| \cdot \sin x + |\sin x| \cdot \cos x$

n) $y = \frac{|x + 2|}{x + 1}$

o) $y = \frac{2|x|}{1 + |x|}$

p) $y = \frac{|x + 2|}{x - 1}$

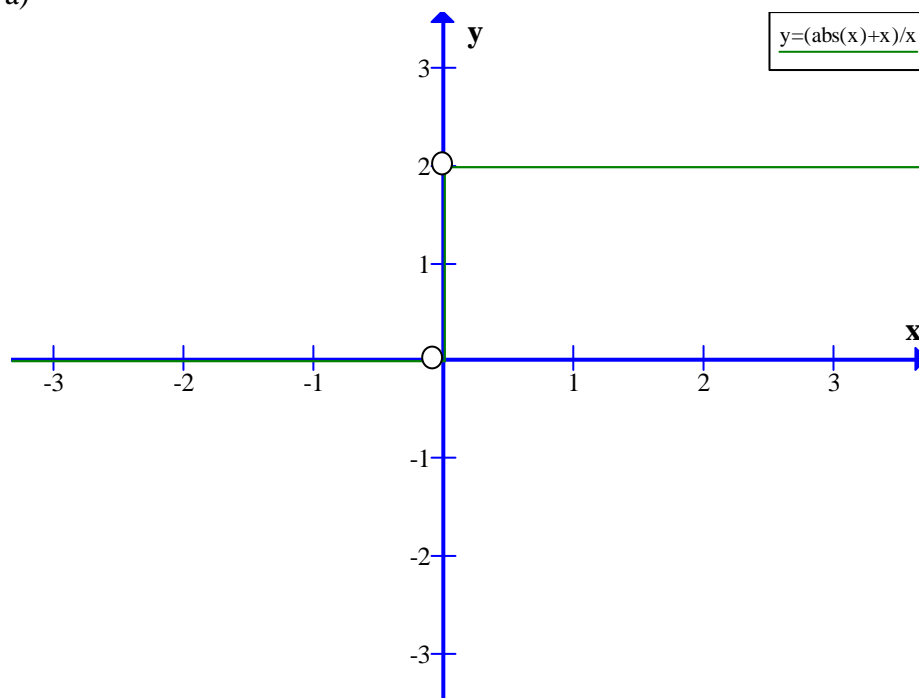
q) $y = |\ln(x + 1)|$

r) $y = \ln|x + 1|$

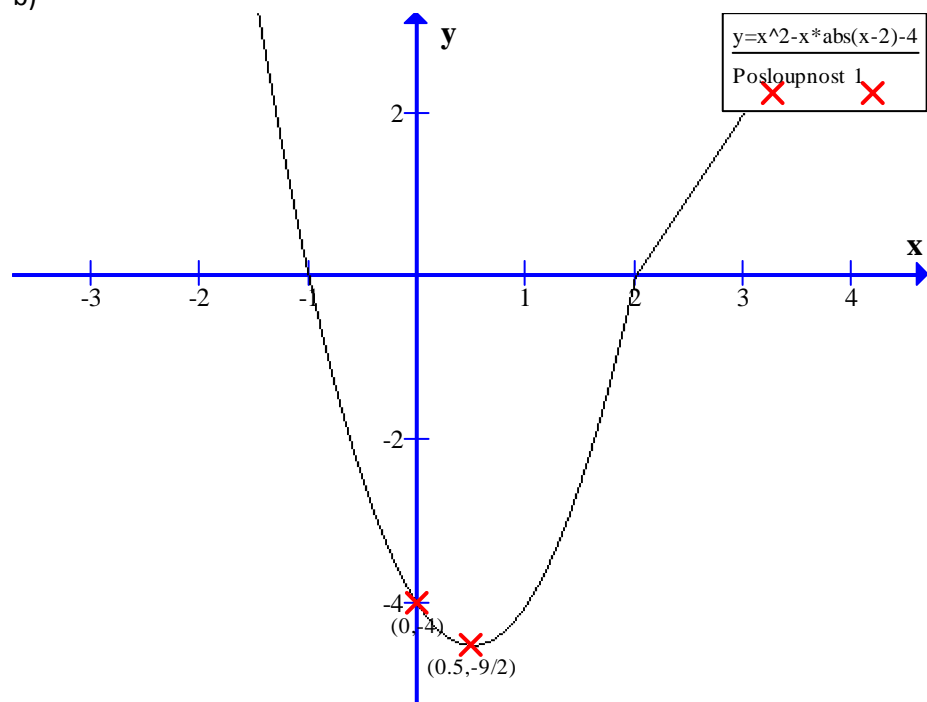
s) $y = |\ln|x + 1||$

Řešení:

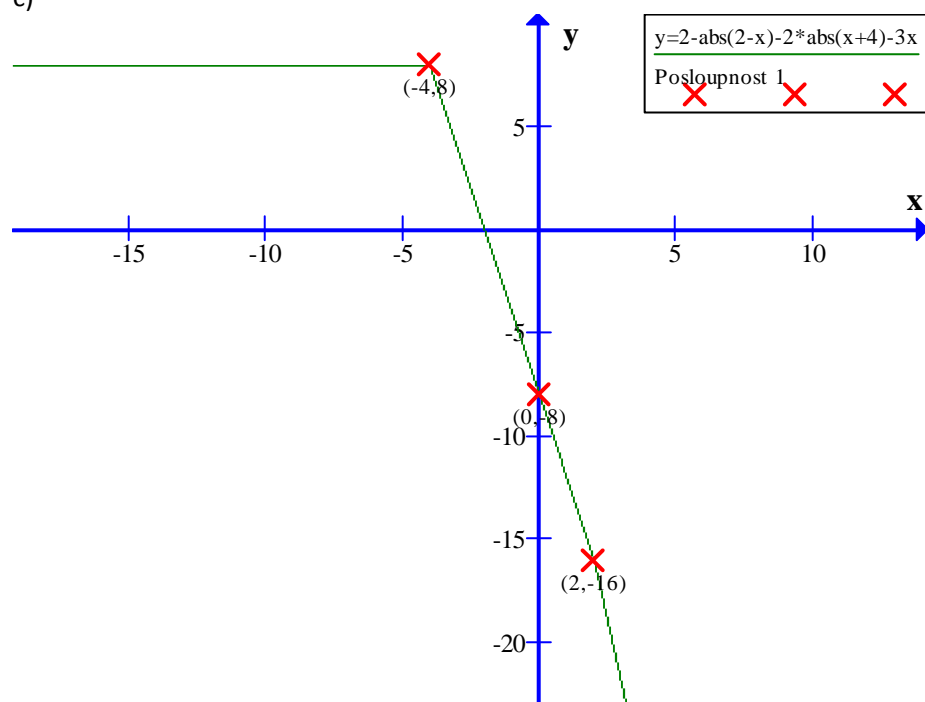
a)



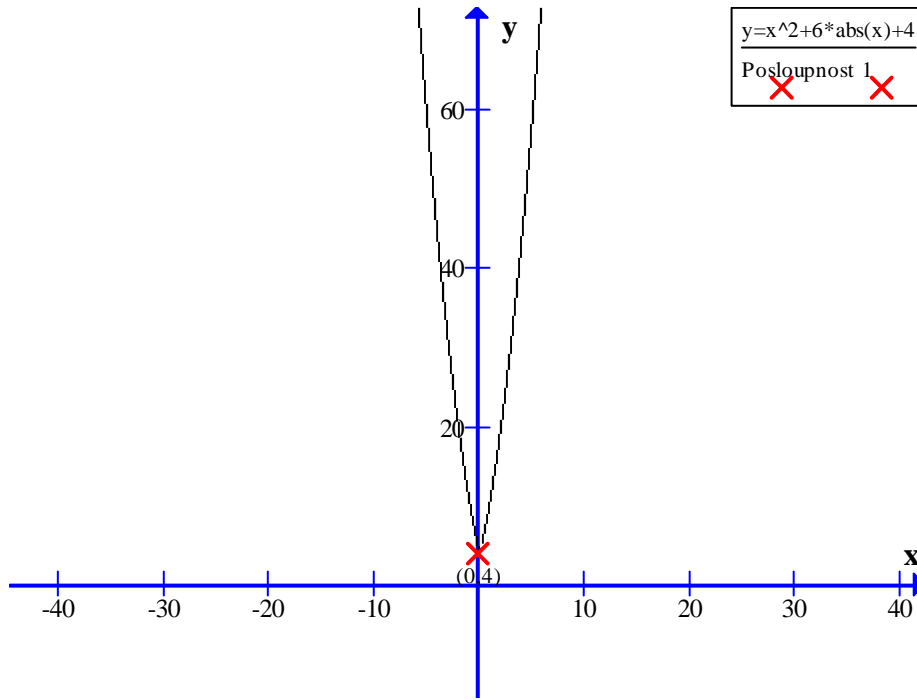
b)



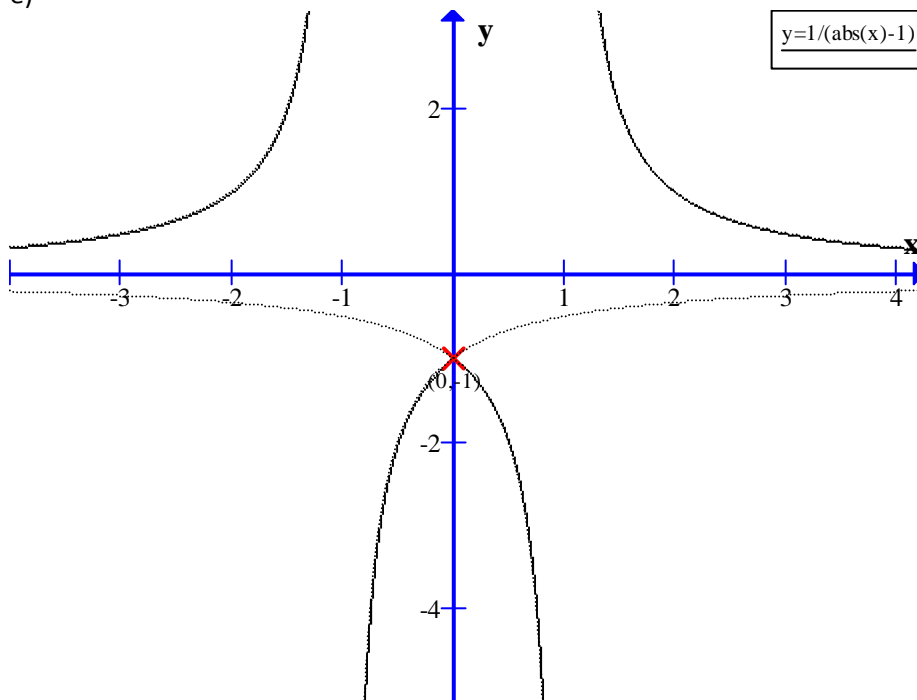
c)



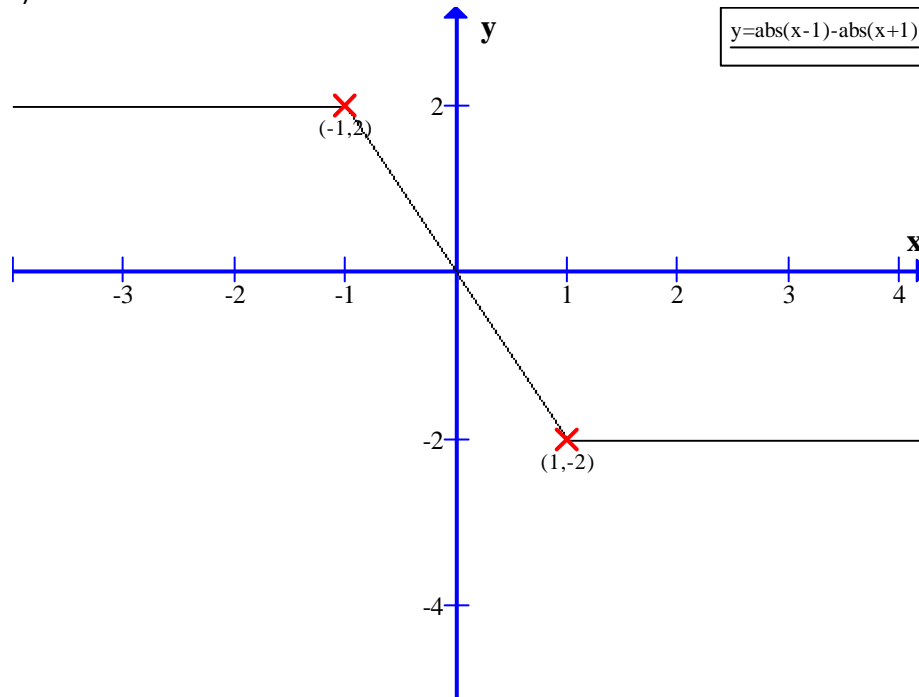
d)



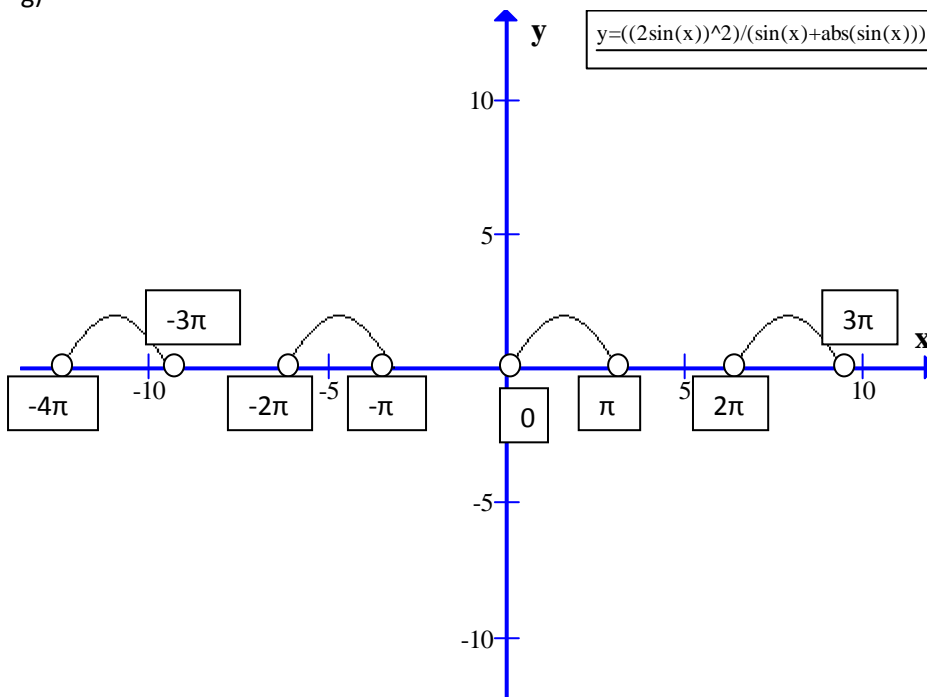
e)



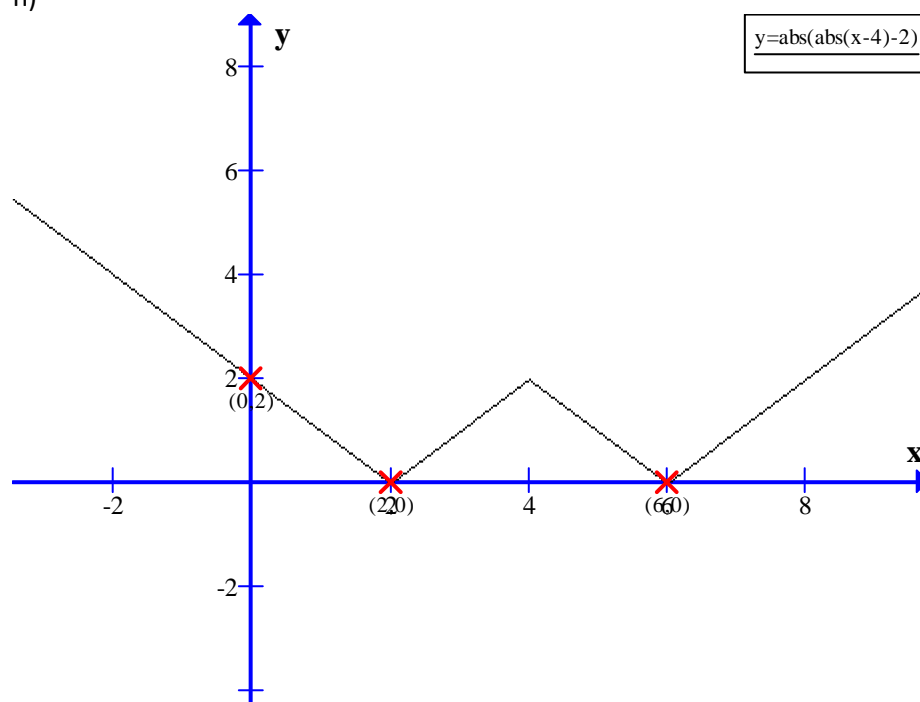
f)



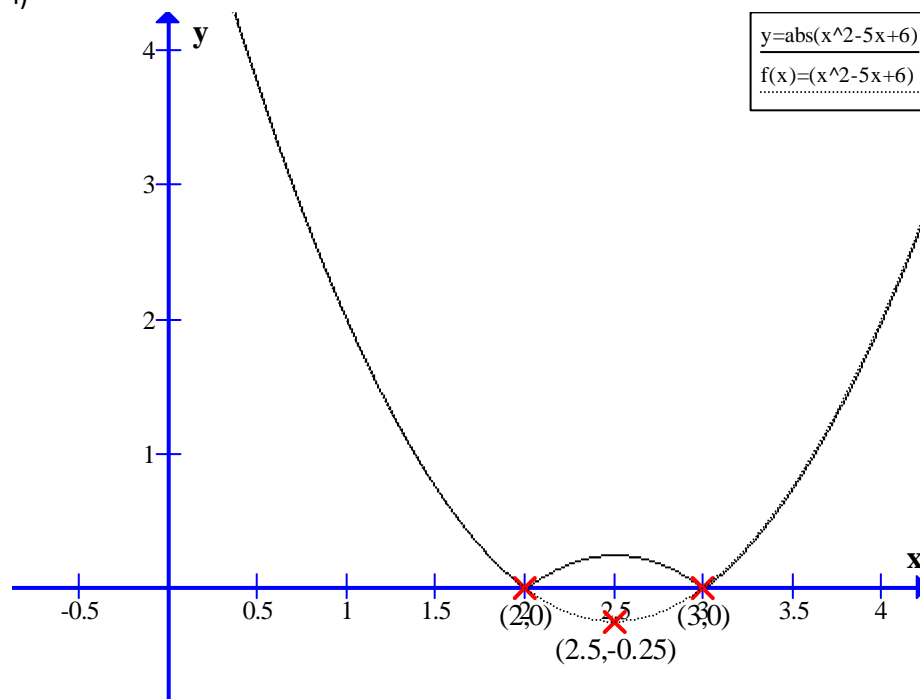
g)



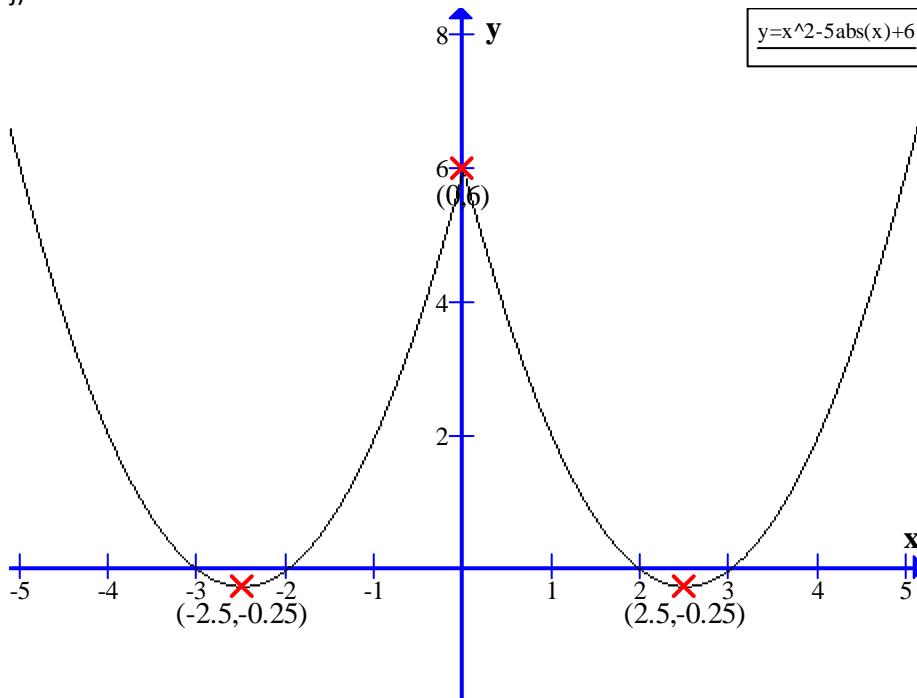
h)



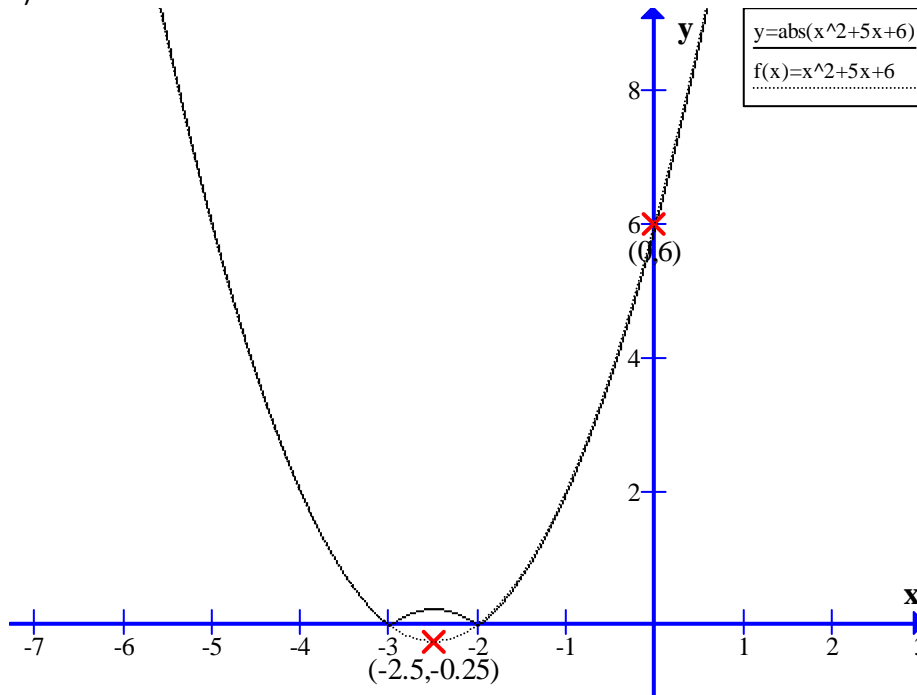
i)



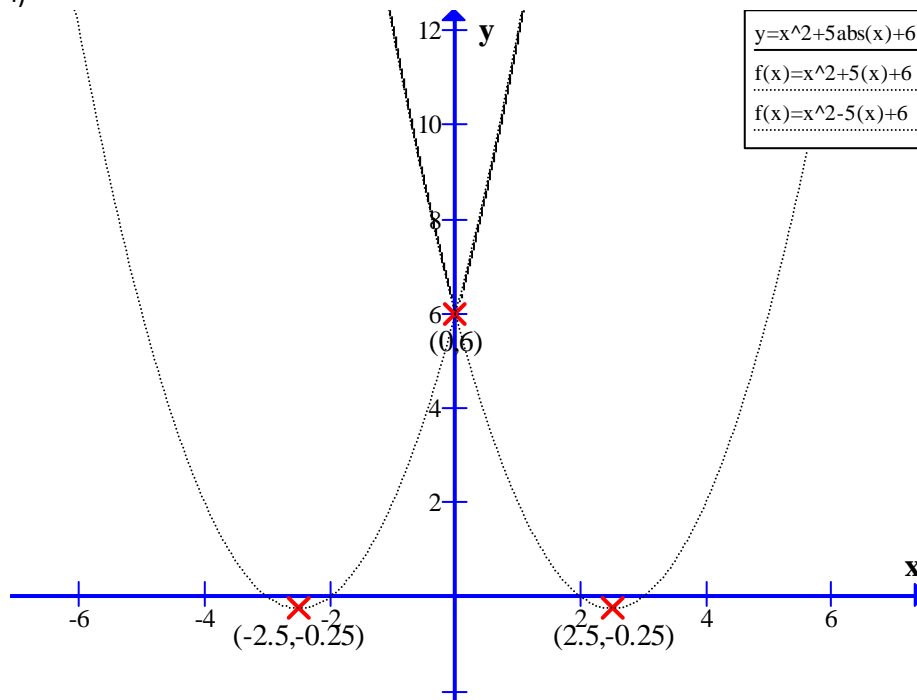
j)



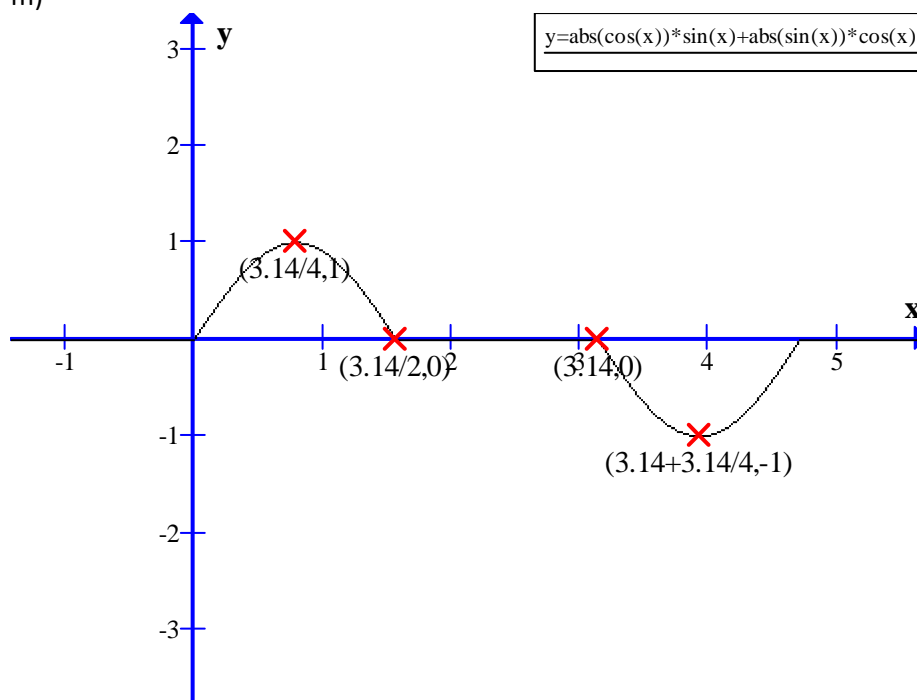
k)



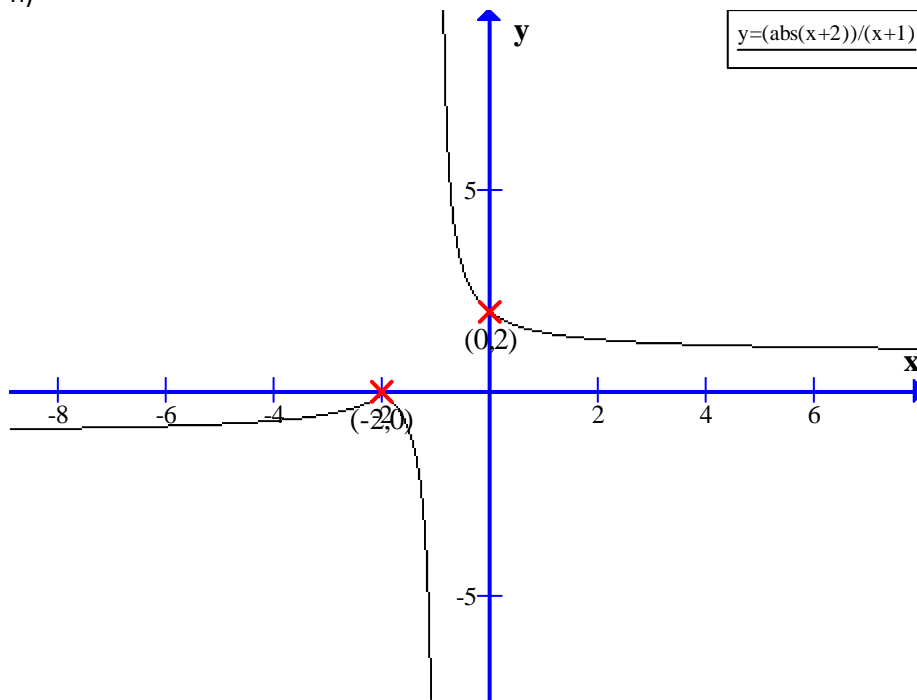
l)



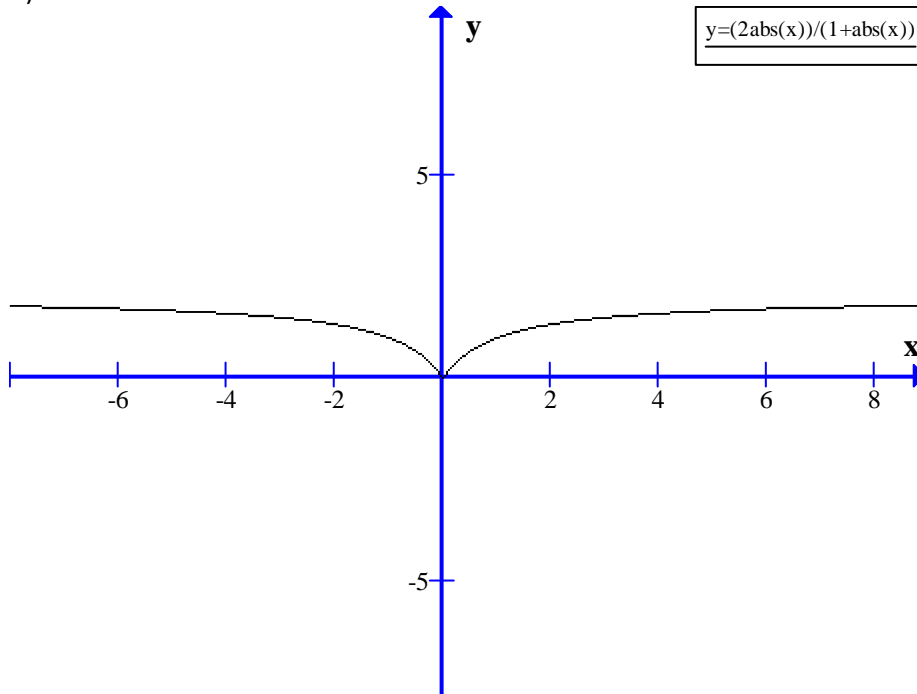
m)



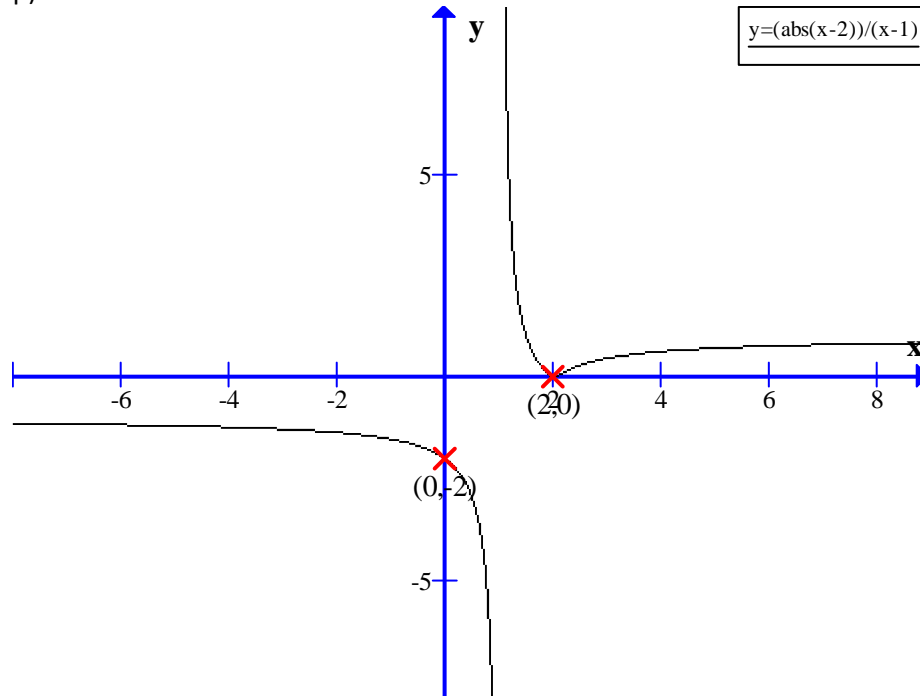
n)



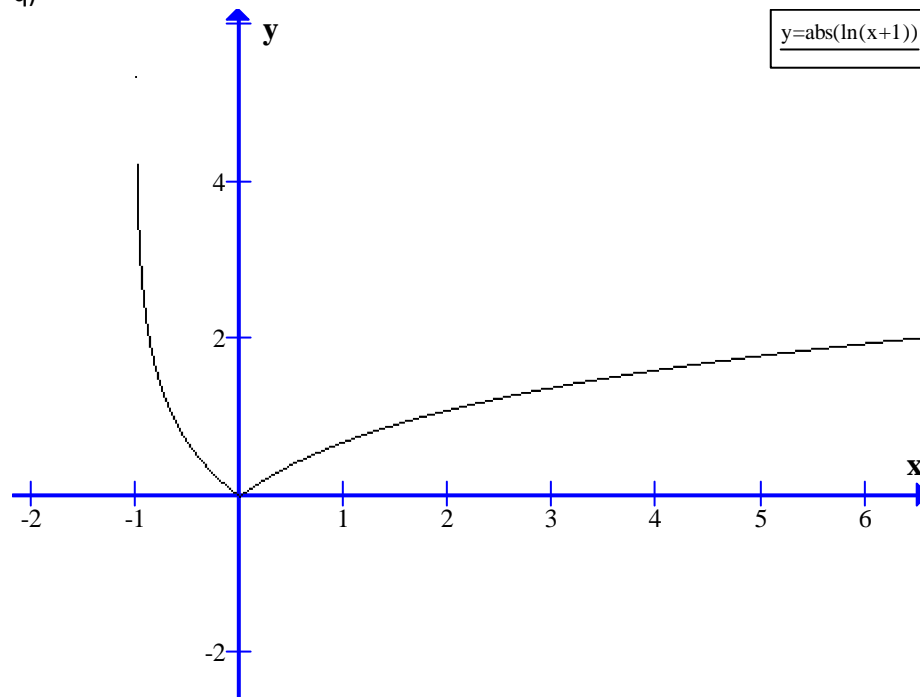
o)



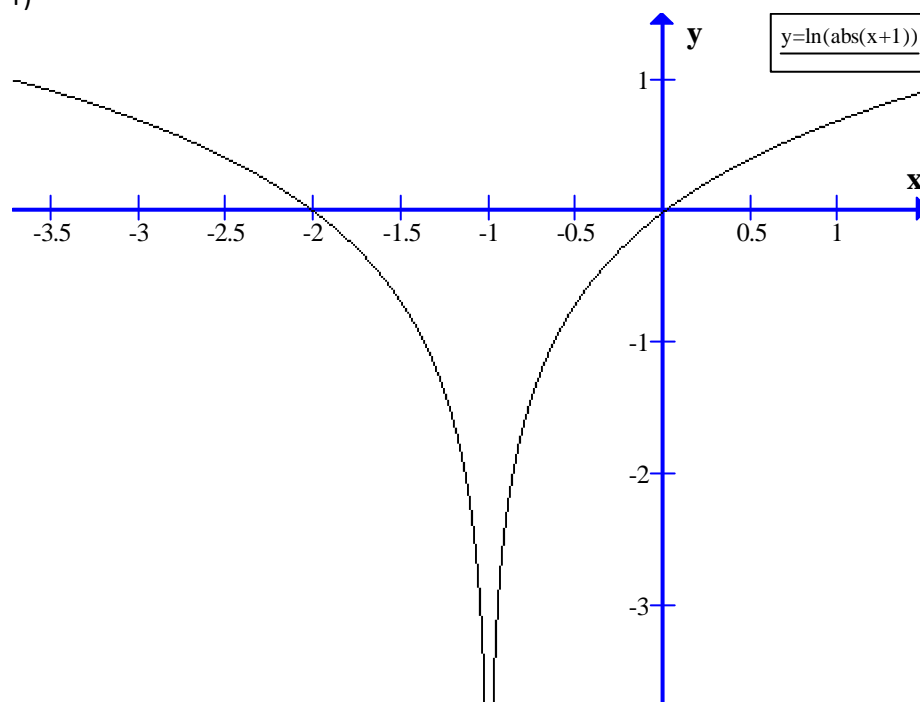
p)



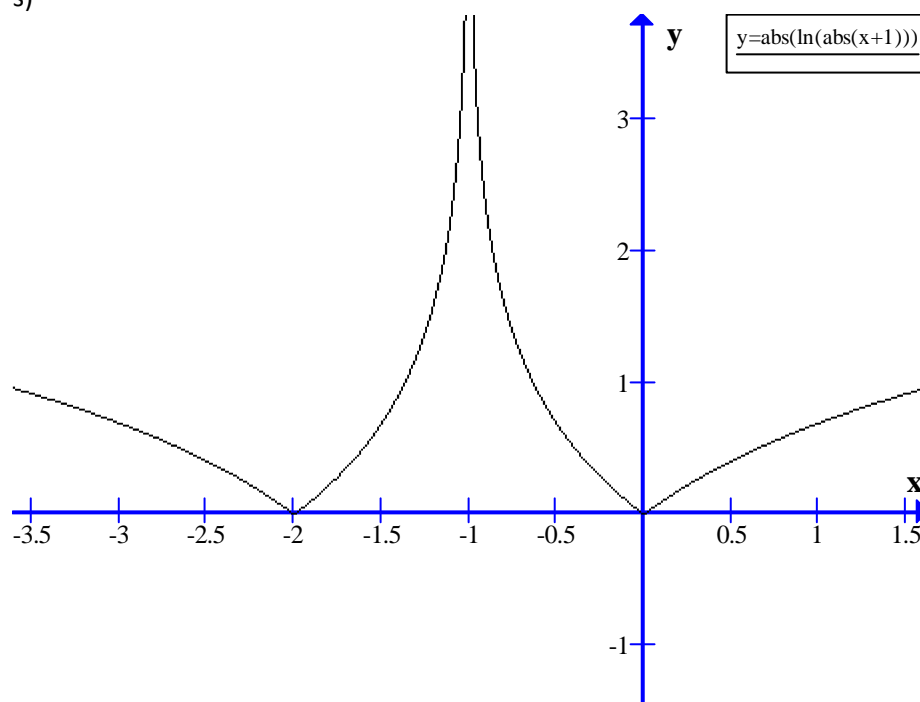
q)



r)



s)



Literatura:

1) Sbírka příkladů z matematiky k přijímacím zkouškám na VŠE, autoři: Marta Rosická a Lada Eliášová, ISBN 80-86119-62-9

2) Matematika – příklady pro přijímací zkoušky, RNDr.Petr Rádl a kolektiv, ISBN 80-7157-625-5