Výrok

Podle přesné definice *výrok* je výraz v určitém formálním jazyce, který obsahuje symboly označující konstanty, proměnné, funkce, relace, logické spojky a kvantifikátory.

Jim se přiřadí význam pomocí *interpretace*.
Interpretace je zobrazení symbolů do konkrétních množin, funkcí, relací apod.

V dané interpretaci je pak výrok pravdivý anebo nepravdivý.

Výrok – neformální definice

Neformálně, *výrok* je sdělení, o němž má smysl uvažovat, zda je pravdivé či není pravdivé. V přirozeném jazyce je to tedy oznamovací věta, která obsahuje alespoň přísudek a která má nějakou *pravdivostní hodnotu*.

Madrid je hlavní město Rakouska.	nepravdivý výrok
Číslo π je iracionální.	pravdivý výrok
Obvod jednotkového čtverce	není výrok, věta nemá pravdivostní hodnotu
Vyřešte rovnici $x^2 - 2x = 3$.	rozkazovací věta není výrok
Je číslo 17 liché?	tázací věta není výrok

Interpretované výroky

Některé výroky mají pravdivostní hodnotu, ale tato pravdivost závisí na *interpretaci*.
Při některých interpretacích je pak výrok pravdivý, a při jiných nepravdivý.

Čtyřúhelník Q je konvexní.	pravdivost závisí na čtyřúhelníku Q.
$\forall n \in \mathbb{N}.\ k \mid n$	pravdivost závisí na čísle k
$A \vee B$	pravdivost závisí na pravdivostních hodnotách proměnných A, B
Dnes celý den prší.	pravdivost závisí na tom, kdy a kde bylo tvrzení vysloveno.

Závislost na interpretaci se projeví výskytem (i implicitním) *volných proměnných* ve výroku (Q, k, A, B, „dnes“, „tady“).

Pravdivostní hodnoty

Je-li nějaký výrok (v dané interpretaci) pravdivý, má pravdivostní hodnotu *pravda*, je-li nepravdivý, má pravdivostní hodnotu *nepravda*.

Pravdivostní hodnoty též krátce označujeme jedničkou (pravdu) a nulou (nepravdu).

Číslo a je sudé.	pravda v interpretacích, kde $2 \mid a$; v ostatních interpretacích nepravda
Z výroku A plyne A.	pravda ve všech interpretacích, kde A je výrok

Tautologie

Výrok může být interpretován i nekonečně mnoha způsoby.
Jsou však výroky, které jsou pravdivé *při všech interpretacích*.
Takové výroky se nazývají *tautologie*.

Součet vnitřních úhlů rovinného trojúhelníka T je $180°$.	vždy pravdivé, nezávisle na T
$n \in \mathbb{N} \Rightarrow 2 \mid 4n$	vždy pravdivé, nezávisle na čísle n
$A \Rightarrow A$	vždy pravdivé, nezávisle na výroku A

Splnitelné výroky

Výrok, který je pravdivý *aspoň v jedné interpretaci*, se nazývá *splnitelný*.

$x > 0$	splnitelný výrok, ale nikoliv tautologie
$A \Rightarrow (A \wedge B)$	splnitelný výrok, ale nikoliv tautologie

Kontradikce

Výrok, který není splnitelný, se nazývá *kontradikce*.
Kontradikce jsou tedy nepravdivé ve všech interpretacích.

Součet vnitřních úhlů trojúhelníka T je $1200°$.	vždy nepravdivé, nezávisle na trojúhelníku T
$n \in \mathbb{N} \ \wedge \ n = n + 1$	vždy nepravdivé, nezávisle na n
$B \wedge \neg B$	vždy nepravdivé, nezávisle na výroku B

Vztahy mezi tautologiemi a splnitelnými výroky

- Negace tautologie je kontradikce.
- Negace kontradikce je tautologie.
- Každá tautologie je splnitelná.
- Výrok, který není kontradikce, je splnitelný.
- Negace splnitelného výroku není tautologie.

Logické spojky – negace

Negace ($\neg$) je unární logická spojka. To znamená, že ovlivňuje *jeden* výrok.
Je-li A výrok, je $\neg A$ negace výroku A.
Negace výroku A má opačnou pravdivostní hodnotu než výrok A.

Nil protéká Egyptem.
Červené světlo má menší frekvenci než fialové.
$3 < 8$

Není pravda, že Nil protéká Egyptem.
Červené světlo nemá menší frekvenci než fialové
$\neg\,(3 < 8)$

Tabulka pravdivostních hodnot pro negaci

A	$\neg A$
0	1
1	0

Vlastnosti negace

V klasické logice platí *pravidlo dvojité negace*

$$\neg\neg A \Leftrightarrow A$$

Logické spojky – konjunkce

Konjunkce ($\wedge$) je binární logická spojka.
To znamená, že spojuje *dva* výroky.
Jsou-li A, B dva výroky, je jejich konjunkce $A \wedge B$ výrok, který je pravdivý, jen když jsou pravdivé *oba* výroky, A i B.
V ostatních případech je konjunkce nepravdivá.

Konjunkci vyjadřujeme slovy „a“, „ani“, „a také“, „a zároveň“.

Sinus a kosinus jsou periodické funkce.	sin je periodická $\wedge$ cos je periodická
Fosfor ani síra nejsou kovy.	fosfor není kov $\wedge$ síra není kov
Číslo 15 je dělitelné pěti a zároveň třemi.	$5 \mid 15 \wedge 3 \mid 15$

Logické spojky – disjunkce

Disjunkce ($\vee$) je binární logická spojka, spojuje dva výroky.
Jsou-li A, B dva výroky, je jejich disjunkce $A \vee B$ výrok, který je pravdivý, když je pravdivý *aspoň jeden* z výroků, A nebo B.
Jsou-li oba výroky nepravdivé, je jejich disjunkce nepravdivá.

Disjunkci vyjadřujeme slovem „nebo“.

Brno je větší než Vídeň nebo je větší než Mnichov.	$\lvert B\rvert > \lvert W\rvert \ \vee \ \lvert B\rvert < \lvert M\rvert$
Měď má větší hustotu než voda nebo větší než rtuť.	$\varrho_{\mathrm{Cu}} > \varrho_{\mathrm{H_2O}} \ \vee \ \varrho_{\mathrm{Cu}} > \varrho_{\mathrm{Hg}}$
Číslo 12 je sudé nebo číslo 20 je dělitelné třemi.	$2 \mid 12 \ \vee \ 3 \mid 20$

Vlastnosti konjunkce a disjunkce

Konjunkce a disjunkce mají obdobné vlastnosti jako množinový průnik a sjednocení: jsou asociativní, komutativní, idempotentní a navzájem distributivní.

Pravdivostní hodnota 1 je neutrálním prvkem konjunkce,
pravdivostní hodnota 0 je neutrálním prvkem disjunkce.

De Morganova pravidla

$$\neg(A \wedge B) \quad \Leftrightarrow \quad \neg A \vee \neg B$$
$$\neg(A \vee B) \quad \Leftrightarrow \quad \neg A \wedge \neg B$$

Logické spojky – implikace

Implikace ($\Rightarrow$) je další binární logická spojka.
Jsou-li A, B dva výroky, je jejich implikace $A \Rightarrow B$ výrok, který říká, že
jakmile je výrok A pravdivý, musí být pravdivý i výrok B, aby byla implikace pravdivá.

Je-li výrok A nepravdivý, je implikace $A \Rightarrow B$ pravdivá.
Jedině případ, kdy A je pravdivý a zároveň B je nepravdivý, porušuje pravdivost implikace.

Implikaci vyjadřujeme slovy „když . . . potom“, „jestliže . . . pak“, „z. . . vyplývá“.

V matematice se implikace $A \Rightarrow B$ vyjadřuje také slovy „A je *dostatečná* podmínka pro B“
nebo „B je *nutná* podmínka pro A“.

Když je teplota nižší než 0°C, voda tuhne.
Je-li číslo n dělitelné šesti, je dělitelné třemi. $\quad 6 \mid n \;\Rightarrow\; 3 \mid n$
Je-li číslo 8 liché, pak $\pi > 7$

Vlastnosti implikace

Implikace *není komutativní ani asociativní*:
implikace $A \Rightarrow B$ a *obrácená implikace* $B \Rightarrow A$ jsou různé výroky,
také $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ a $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ jsou různé výroky.

Implikace je *transitivní* :
když platí implikace $A \Rightarrow B$ a také implikace $B \Rightarrow C$, pak platí i implikace $A \Rightarrow C$.

Tuto vlastnost můžeme vyjádřit jako složenou implikaci

$$(A \Rightarrow B) \ \wedge \ (B \Rightarrow C) \quad \Rightarrow \quad (A \Rightarrow C)$$

Vlastnosti implikace

Implikace $A \Rightarrow B$ je ekvivalentní implikaci $\neg B \Rightarrow \neg A$,
která vznikne negací obou stran implikace a následným obrácením pořadí negovaných výroků. Říká se jí též *obměněná implikace*.

$$A \Rightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad \neg B \Rightarrow \neg A$$

Negace implikace:

$$\neg (A \Rightarrow B) \quad \Leftrightarrow \quad A \wedge \neg B$$

Logické spojky – ekvivalence

Ekvivalence ($\Leftrightarrow$) je binární logická spojka, která vyjadřuje skutečnost, že dva výroky mají stejnou pravdivostní hodnotu.

Jsou-li A, B dva výroky, je ekvivalence $A \Leftrightarrow B$ pravdivá, právě když jsou oba výroky A, B současně pravdivé nebo oba současně nepravdivé.
Je-li jeden z nich pravdivý a druhý nepravdivý, je ekvivalence $A \Leftrightarrow B$ nepravdivá.

Implikaci vyjadřujeme slovy „právě když“, „tehdy a jen tehdy“, „přesně tehdy, když“.

Geometrická posloupnost s kvocientem q konverguje, právě když $|q| < 1$.

Vlastnosti ekvivalence

Dva výroky A, B jsou ekvivalentní, $A \Leftrightarrow B$, právě když mezi nimi platí implikace $A \Rightarrow B$ a zároveň i obrácená implikace $B \Rightarrow A$.

$$\big(A \Leftrightarrow B\big) \iff \big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)\big)$$

Ekvivalence je komutativní: $(A \Leftrightarrow B) \quad \Leftrightarrow \quad (B \Leftrightarrow A)$
Je asociativní: $\big((A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C\big) \quad \Leftrightarrow \quad \big(A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)\big)$
Neutrální prvek je výrok s pravdivostní hodnotou 1.

Další logické spojky

Další binární logické spojky, s nimiž se můžeme setkat například u polovodičových hradel, jsou
negovaná konjunkce ($\bar{\wedge}$, *nand*, *Shefferova spojka*),
negovaná disjunkce ($\bar{\vee}$, *nor*, *Peirceova spojka*),
nonekvivalence ($\not\Leftrightarrow$, *xor*, $\veebar$).

Tabulka pravdivostních hodnot pro binární spojky

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$	$A \bar{\wedge} B$	$A \bar{\vee} B$	$A \not\Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	0	0	0

Kvantifikátory

Výroky mohou obsahovat obsahovat proměnné, které jsou ve výroku *kvantifikovány* pomocí *kvantifikátorů*.

Kvantifikátor v širším smyslu je jakékoliv určení počtu nebo množství prvků, pro něž má platit nějaký výrok.

V sále je *nejvýše 12* lidí.
Právě jedno číslo je neutrálním prvkem násobení.
Každé reálné číslo je komplexní.
Existují liché funkce.

V matematické logice jsou důležité především
obecný kvantifikátor a *existenční kvantifikátor*.

Obecný kvantifikátor

Obecný neboli univerzální kvantifikátor $\forall$ slouží k vyjádření tvrzení, že výrok platí pro všechny hodnoty, které lze dosadit za kvantifikovanou proměnnou.
Vyjadřujeme slovy „všichni“, „všechna“, „každý“.

Každé celé číslo dělitelné šesti je sudé.

Všechny čtverce si jsou navzájem podobné.

Všichni lidé pijí vodu.

Prázdná množina je podmnožinou každé množiny. $\forall S.\, \varnothing \subseteq S$

Existenční kvantifikátor

Existenční kvantifikátor $\exists$ vyjadřuje tvrzení, že výrok platí pro aspoň jednu hodnotu, kterou lze dosadit za kvantifikovanou proměnnou.
Vyjadřujeme slovy „existuje“, „nějaké“, „některé“.

Existují radioaktivní prvky.

Některá reálná čísla nejsou racionální.

Rovnice $x^4 = 16$ má v R aspoň jeden kořen.

Existují čtyři kladná celá čísla a, b, c, n tak, že $n > 2$ a $a^n + b^n = c^n$.

De Morganova pravidla pro kvantifikátory

Existenční kvantifikátor lze vyjářit pomocí obecného a naopak.

$$\begin{aligned} \neg\, \forall x.\, A &\quad\Leftrightarrow\quad \exists x.\, \neg A \\ \neg\, \exists x.\, A &\quad\Leftrightarrow\quad \forall x.\, \neg A \end{aligned}$$

Tato pravidla lze u složených výroků použít opakovaně:
když negujeme kvantifikovaný výrok A začínající několika kvantifikátory a mající uvnitř (za posledním kvantifikátorem) výrok B,
nahradíme každý obecný kvantifikátor existenčním a naopak,
a negujeme vnitřní výrok B.

De Morganova pravidla pro kvantifikátory – příklad

Označíme $\mathbb{R}^+$ množinu všech kladných reálných čísel.

A: Ke každému číslu $x \in \mathbb{R}^+$ existuje číslo $y \in \mathbb{R}^+$ takové, že $y < x$,
neboli $\quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \, \exists y \in \mathbb{R}^+ . \; y < x$

$\neg A$: Existuje číslo $x \in \mathbb{R}^+$ tak, že všechna $y \in \mathbb{R}^+$ jsou větší nebo rovna x,
neboli $\quad \exists x \in \mathbb{R}^+ \, \forall y \in \mathbb{R}^+ . \; y \geqslant x$

Víme, že výrok A je pravdivý a výrok $\neg A$ je nepravdivý.
Kdybychom však místo $\mathbb{R}^+$ brali množinu všech *nezáporných* reálných čísel,
byl by výrok A nepravdivý a výrok $\neg A$ by byl pravdivý.

Matematické teorie

Matematické *věty* neboli *teorémy* se odvozují z jednodušších vět,
ty se odvozují z ještě jednodušších atd.
Základní věty, které se neodvozují, jsou *axiomy*.

Když se buduje matematická teorie, vytvoří se nejdříve *jazyk*, v němž se budou formulovat matematické věty a definovat nové pojmy pomocí pojmů existujících.

Tento jazyk je typicky jazykem výroků s logickými spojkami a kvantifikátory.
Navíc obsahuje *symboly* pro konstanty, funkce a relace, které mají v dané teorii svou *interpretaci* – *skutečné* konstanty, funkce, relace.

Potom se stanoví množina *axiomů* a *odvozovacích pravidel*, jimiž se odvozují nové věty.

Axiomy mohou být logické (platné nezávisle na teorii), například $A \Rightarrow A$,
nebo vlastní dané teorii, například $\forall n \in \mathbb{N}.\, n + 1 \in \mathbb{N}$.

Odvozovací pravidla jsou logická,
například pravidlo *modus ponens* říká:
Jsou-li A *a* $A \Rightarrow B$ *teorémy, pak i* B *je teorém.*

Z axiomů se pomocí odvozovacích pravidel tvoří všechny věty dané teorie.

Důkazy

Důkaz matematické věty je přesné odvození její platnosti z *předpokladů*.

Předpoklady jsou tvrzení dokázaná už dříve.

Důkaz se skládá z kroků. V každém kroku lze vyjít z axiomu teorie, předpokladu věty nebo výsledku předchozích kroků.
Výsledné tvrzení každého kroku (*závěr*) vznikne použitím odvozovacího pravidla.

Důkazové techniky

Dokazovanou větu můžeme buď dokázat přímo,
anebo ji nejdříve převedeme na ekvivalentní tvrzení,
které umíme dokázat jednodušeji.

Přímý důkaz implikace

Implikaci $A \Rightarrow B$ vyjádříme jako několik po sobě jdoucích implikací:

$$A \Rightarrow B \quad \Longleftrightarrow \quad (A \Rightarrow A_1) \quad \wedge \quad (A_1 \Rightarrow A_2) \quad \wedge \quad \cdots \quad \wedge \quad (A_{n-1} \Rightarrow A_n)$$

kde $A_n = B$.

Jednotlivé implikace dokážeme.

Díky transitivitě implikace máme důkaz výroku $A \Rightarrow B$.

Nepřímý důkaz implikace

Při důkazu implikace $A \Rightarrow B$ tuto implikaci obměníme na ekvivalentní tvar $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Předpokládáme, že platí negace důsledku, tedy $\neg B$, a postupným odvozováním důsledků výroku $\neg B$ dostaneme výrok $\neg A$.

Tím dokážeme implikaci $\neg B \Rightarrow \neg A$, která je ekvivalentní s implikací $A \Rightarrow B$.

Důkaz sporem

Při důkazu věty A předpokládáme, že platí její negace $\neg A$.
Postupným odvozováním důsledků této negace dostaneme výrok,
který je zjevně nepravdivý.
Z pravdivého výroku A bychom korektním odvozováním nepravdivý výrok nedostali. Tudíž předpoklad $\neg A$ neplatil. Výrok A je tedy pravdivý.

Důkaz sporem je zvláštním případem nepřímého důkazu:

Dokazujeme tvrzení A, neboli ekvivalentní implikaci $1 \Rightarrow A$.
Dokážeme ji nepřímo, tedy jako přímý důkaz obměněné implikace $\neg A \Rightarrow 0$.

Úlohy – tabulka pravdivostních hodnot

Ukažte pomocí tabulky pravdivostních hodnot, že následující výroky jsou tautologie.

$$
\begin{aligned}
A \Rightarrow B \quad &\Leftrightarrow \quad \neg A \vee B \\
A \wedge B \quad &\Leftrightarrow \quad (A \Rightarrow (B \Rightarrow 0)) \Rightarrow 0 \\
A \Rightarrow B \quad &\Leftrightarrow \quad \neg B \Rightarrow \neg A \\
\neg(A \wedge B) \quad &\Leftrightarrow \quad \neg A \vee \neg B \\
\neg(A \vee B) \quad &\Leftrightarrow \quad \neg A \wedge \neg B
\end{aligned}
$$

Úlohy – tabulka pravdivostních hodnot

Ukažte pomocí tabulky pravdivostních hodnot, že následující výrok je tautologie.

$$(A \wedge B) \Rightarrow C \quad \Leftrightarrow \quad A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$$

Kolik řádků má tabulka pravdivostních hodnot?
Jak závisí počet řádků tabulky na počtu výrokových proměnných ve složeném výroku?

Úlohy – tabulka pravdivostních hodnot

Dokažte vzájemnou distributivitu konjunkce a disjunkce.

Úlohy – tabulka pravdivostních hodnot

Sestrojte tabulku pravdivostních hodnot pro tři výroky:

$(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$, $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$, $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$.

Je logická spojka $\Rightarrow$ asociativní?

Úlohy – přímý důkaz

Dokažte indukcí:

Je-li n liché celé číslo, je jeho pátá mocnina lichá.

Úlohy – důkaz sporem

Dokažte, že $\sqrt{2}$ je iracionální číslo.

Úlohy – indukce

Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

Úlohy – indukce

Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Úlohy – indukce

Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n \geqslant 3$ platí:
Součet vnitřních úhlů n-úhelníka je $(n-2)\cdot 180^\circ$.
Předpokládejte že pro trojúhelník (pro n=3) tvrzení platí.

Úlohy – indukce

Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n \geqslant 3$ má konvexní n-úhelník $\frac{n(n-3)}{2}$ úhlopříček.