Rovnice

Rovnice je zápis ve tvaru

$$L(x) = R(x)$$

Přitom $L(x)$ je tzv. *levá strana* rovnice a $L(x)$ je tzv. *pravá strana* rovnice.
Každá strana rovnice je výraz, který může obsahovat proměnnou x, tzv. *neznámou*.

Pro rovnici je zadaná množina U, v níž se má rovnice řešit.
Každá hodnota $r \in U$, která po dosazení za x splňuje rovnost $L(r) = R(r)$, se nazývá *kořen* rovnice $L(x) = R(x)$.

Řešení rovnice v zadané množině U je *množina* všech jejích kořenů,
tj. množina $\{r \in U;\ L(r) = R(r)\}$.

Rovnice s více neznámými

Rovnice také může obsahovat více neznámých, $L(x_1, \ldots, x_n) = R(x_1, \ldots, x_n)$.
Jejím řešením je množina všech takových uspořádaných n-tic $[x_1, \ldots, x_n] \in U^n$,
že po dosazení $x_1, \ldots, x_n$ za neznámé je rovnost splněna.

Například $z = x - y$ je rovnice o třech neznámých, x, y, z, jejímž řešením je nekonečná množina uspořádaných trojic reálných čísel.

Soustavy rovnic

Soustava rovnic je neprázdná konečná množina rovnic

$$\begin{aligned} L_1(x_1,\ldots,x_n) &= R_1(x_1,\ldots,x_n) \\ L_2(x_1,\ldots,x_n) &= R_2(x_1,\ldots,x_n) \\ &\vdots \\ L_m(x_1,\ldots,x_n) &= R_m(x_1,\ldots,x_n) \end{aligned}$$

Řešení soustavy rovnic v množině U je průnik všech řešení jednotlivých rovnic soustavy.

V praxi hledáme řešení tak, že provádíme úpravy celé soustavy.

Soustava rovnic jako jedna rovnice

Soustavu m rovnic s n neznámými z množiny U lze považovat za speciální případ jedné rovnice s jednou neznámou v množině U^n.

Například soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x &= 3 - y \\ x - 1 &= y \end{aligned}$$

s neznámými v R lze nahradit jednou rovnicí

$$[x + y,\, x - y] = [3,\, 1]$$

s neznámou uspořádanou dvojicí $[x, y] \in \mathrm{R} \times \mathrm{R} = \{[x, y];\ x \in \mathrm{R}, y \in \mathrm{R}\}$.

Soustava lineárních rovnic jako jedna rovnice

Když soustavu dvou lineárních rovnic zapíšeme

$$\begin{array}{rcrcr} 3x & + & y & = & 9 \\ 2x & - & 3y & = & -5 \end{array}$$

můžeme ji vyjádřit jako maticový součin

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Soustavu lineárních rovnic lze zapsat jako *vektorovou rovnici* $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, kde $\boldsymbol{A}$ je matice koeficientů, $\boldsymbol{x}$ je řádkový vektor neznámých a $\boldsymbol{b}$ je sloupcový vektor čísel.

Typy rovnic

Rovnice rozlišujeme podle tvaru výrazů na její levé a pravé straně a podle universa, tj. množiny U, v níž hledáme řešení.

- Řešení *diofantických* rovnic mohou být jen celá čísla.
- *Algebraické* rovnice mají tvar $p(x) = 0$, kde p je polynom; řeší se v množině reálných nebo komplexních čísel.
- Řešením *funkcionální* rovnice je jakákoliv funkce.
- *Diferenciální* rovnice jsou funkcionální rovnice nad reálnými nebo komplexními čísly a vystupují v nich neznámé funkce a jejich derivace.

Obecně mohou být neznámými v rovnicích a jejich soustavách jakékoliv objekty: vektory, matice, posloupnosti, množiny atd.

Nerovnice

Podobně jako s rovnicemi lze pracovat s *nerovnicemi*,
kde je místo rovnosti použita jiná binární relace.

U nerovnic na číslech je to některá z relací $<$, $\leqslant$, $\geqslant$, $>$,
takže nerovnice pak může mít tvar

$$\begin{aligned} L(x) &< R(x) \\ L(x) &\leqslant R(x) \\ L(x) &\geqslant R(x) \\ L(x) &> R(x) \end{aligned}$$

Ekvivalentní úpravy

Nejdůležitější metoda řešení rovnic i nerovnic je pomocí *ekvivalentních úprav*.

Rovnici $L(x) = R(x)$ převedeme na ekvivalentní rovnici $L'(x) = R'(x)$,
která má přesně tytéž kořeny jako původní rovnice.

$$\begin{array}{rcl} L(x) & = & R(x) \\ & \Updownarrow & \\ L'(x) & = & R'(x) \end{array} \qquad K = K'$$

Vyřešením upravené rovnice $L'(x) = R'(x)$
pak máme vyřešenu původní rovnici $L(x) = R(x)$.

Ekvivalentní úpravy

Ekvivalentní úpravy rovnic

- přičtení stejného čísla k oběma stranám rovnice,
- vynásobení obou stran rovnice stejným *nenulovým* číslem.

Obecněji: aplikace *injektivní* funkce na obě strany rovnice.

Ekvivalentní úpravy nerovnic

- přičtení stejného čísla k oběma stranám nerovnice,
- vynásobení obou stran rovnice stejným *kladným* číslem.

Obecněji: aplikace *rostoucí* funkce na obě strany nerovnice.

Obrácení relačního znaménka v nerovnici

Přičteme-li k oběma stranám nerovnice $L < R$ číslo $-L - R$, dostaneme touto ekvivalentní úpravou nerovnici $-R < -L$, neboli $-L > -R$.

Proto ekvivalentní úprava nerovnice je také vynásobení obou stran nerovnice číslem -1 a následná změna znaménka nerovnosti na obrácené.

Totéž platí pro vynásobení obou stran nerovnice kterýmkoliv *záporným* číslem.

Totéž platí pro aplikaci libovolné *klesající* funkce na obě strany nerovnice.

Neekvivalentní úpravy

Někdy je třeba upravit rovnici tak, že nová rovnice má více kořenů než původní.
Taková úprava je *neekvivalentní* a u všech kořenů upravené rovnice pak musíme ověřit, zda jsou také kořeny původní rovnice.

$$\begin{array}{rcl} L(x) & = & R(x) \\ & \Downarrow & \\ L'(x) & = & R'(x) \end{array} \qquad K \subseteq K'$$

Jestliže po dosazení do původní rovnice nenastane rovnost, kořen vyloučíme.

Neekvivalentní úpravy

Neekvivalentní úprava rovnice nad číselnou množinou
je například umocnění obou stran rovnice na druhou.

Kořeny, které vyjdou po neekvivalentní úpravě, musíme vyfiltrovat pomocí *zkoušky*, abychom zjistili kořeny původní rovnice.

Úlohy – rovnice s neekvivalentní úpravou

Řešte v R rovnici s neznámou x.

$$\frac{x-1}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}=\frac{5}{2}$$

Úlohy – rovnice s parametrem

Řešte v R kvadratickou rovnici s parametrem p:

$$px^2 + 6p^2x + p = 0$$

Úlohy – rovnice s parametrem

Řešte v R rovnici s neznámou x a reálným parametrem t.

$$\frac{(2x-1)(2t-2)}{x-1} = t+1$$

Úlohy – rovnice s absolutní hodnotou

Řešte v R rovnice s neznámou x.

$$|x-2|+x=|3x+1|-1$$

$$|2-x|+|2x-1|=x$$

$$\left|\frac{3x+1}{1-x}\right|=\frac{1}{2}$$

Úlohy – nerovnice v Z

Řešte v Z kvadratickou nerovnici

$$x^2 - 2 < 2 - y^2$$

Jak se změní řešení, když bude nerovnost neostrá?

Úlohy – nerovnice s absolutní hodnotou

Řešte v R nerovnice

$$|2x - 1| - |x - 2| \leqslant 3$$

$$|x| - |x - 5| \leqslant 8$$

$$|x - 1| + |x + 1| \geqslant |x + 3|$$

Úlohy – soustava rovnic

Řešte v $\mathbb{R}^2$ soustavu

$$\begin{aligned}(x+4)\cdot(y-2) &= (x-2)\cdot(y+13)\\ (x-1)\cdot(y-3) &= (x+2)\cdot(y-5)\end{aligned}$$

Úlohy – soustava rovnic

Řešte v $\mathbb{R}^2$ soustavu

$$\begin{aligned} 1-2x &= 1 \\ \frac{5}{1-y} &= \frac{6}{2x+1} \end{aligned}$$

Úlohy – rovnice vyššího stupně

Řešte v R rovnici

$$x^6 + 19x^3 - 216 = 0$$

Úlohy – kubické rovnice

Řešte v R rovnice

$$x^3 - 21x + 20 = 0$$

$$x^3 + 3x^2 - 22x - 24 = 0$$

$$x^3 - 10x^2 + 17x + 28 = 0$$

Návod: Rovnice třetího stupně lze řešit pomocí tzv. *Cardanových formulí*.
Ale když známe (nebo uhodneme) aspoň jeden kořen, vystačíme s jednodušším postupem

Úlohy – rovnice vyššího stupně

Řešte v R rovnici

$$x^5 - x^4 - 13x^3 + 13x^2 + 36x - 36 = 0$$

Pro přesné řešení rovnic pátého stupně neexistuje obecná metoda.
Rovnici však řešit lze, pokud známe aspoň jeden kořen.