Množiny

Teorie množin je jedna z nejobecnějších matematických teorií.
Celou dnešní matematiku lze vybudovat na teorii množin.

Naivní teorie množin: 19. století, Georg Cantor.
Definice *mohutnosti* množiny, tj. velikosti, počtu jejích prvků.
Naivní teorie množin obsahovala paradoxy (Russelův paradox)

Axiomatické teorie množin: začátek 20. století.
Odstraňují logické paradoxy.
Zermelo–Skolem–Fraenkel, Neumann–Bernays–Gödel.

Základní pojem: *množina*,
základní relace: $\in$,
sada několika *axiomů*.

Základní pojmy teorie množin

Množina je kolekce, skupina, souhrn.

Množina obsahuje *prvky*.

Značení: prvek x *patří* do množiny A: $x \in A$
prvek y *nepatří* do množiny A: $y \notin A$

Zápis množiny charakteristickou vlastností

Množiny zapisujeme pomocí jejich *charakteristické vlastnosti*.
Prvek patří do množiny, právě když má danou charakteristickou vlastnost.
Zapisujeme

$$\{x;\ P(x)\}$$

Například množina všech sudých čísel: $\{n;\ \exists k \in \mathbb{Z}.\ n = 2k\}$

Množina všech racionálních čísel: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n};\ \ m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{Z} \wedge n > 0\right\}$

Zápis množiny výčtem

Jiný způsob zápisu množin je zápis *výčtem*.

Množina pravdivostních hodnot: $\{\mathit{nepravda}, \mathit{pravda}\}$
Množina kladných lichých čísel: $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$
Použijeme-li při zápisu tři tečky, musí být zřejmé, co patří na jejich místo.

Poznámka: Zápis $\{2, 3, 2, 1, 3, 4, 4\}$ není nesprávný, ale je zbytečný a nepřehledný. Platí $\{2, 3, 2, 1, 3, 4, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Prvek v množině buď je, anebo není.
V matematice však existují i jiné struktury, tzv. *multimnožiny*, v nichž hrají roli i počty prvků.

Vztahy mezi množinami – inkluze

Množina A je *podmnožinou* množiny B, právě když každý prvek množiny A je také prvkem množiny B.

$$A \subseteq B \iff \forall x.\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Vztah se též nazývá *inkluze*.

Je-li A podmnožinou množiny B, a přitom $A \neq B$, říkáme, že A je *vlastní podmnožinou* množiny B.

$$A \subset B \iff A \subseteq B \wedge A \neq B$$

(Pozor, značení se někdy liší, proto se vztah vlastní podmnožiny pro zdůraznění také zapisuje $A \subsetneq B$.)

Vztahy mezi množinami – inkluze

Prázdná množina je podmnožinou každé množiny.

$$\varnothing \subseteq A$$

Každá množina je podmnožinou sebe samé.
Říkáme, že vztah inkluze je *reflexivní*.

$$A \subseteq A$$

Inkluze je také *transitivní*.

$$A \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq C \ \Rightarrow \ A \subseteq C$$

Vztahy mezi množinami – rovnost a disjunktnost

Množiny A, B jsou si *rovny*, právě když každý prvek množiny A je prvkem množiny B i naopak, každý prvek množiny B je prvkem množiny A.

$$A = B \iff \forall x.\ (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Platí $A = B \iff A \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq A$

Jestliže dvě množiny A, B nemají *žádný* společný prvek, říkáme, že jsou *disjunktní*.

Velikosti množin – kardinalita

Množiny mohou být *konečné* nebo *nekonečné*.
Například množina všech souhlásek v české abecedě je konečná,
množina všech racionálních čísel je nekonečná.

Počet prvků množiny se označuje slovy *velikost*, *mohutnost* nebo *kardinalita*.
Značí se $|A|$.

Zvláštním případem konečné množiny je *prázdná množina* $\varnothing$.
Prázdná množina neobsahuje žádné prvky, tedy $|\varnothing| = 0$.

Mohutnosti konečných množin jsou nezáporná celá čísla.

Mohutnosti nekonečných množin se vyjadřují tzv. nekonečnými kardinálními čísly,
například $\aleph_0 = |\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$ je nejmenší nekonečné kardinální číslo.

Porovnávání mohutností

Množina A má mohutnost menší nebo rovnu mohutnosti množiny B, zapisujeme $|A| \leqslant |B|$, právě když existuje *injektivní zobrazení* množiny A do množiny B.

Množina A má mohutnost stejnou jako množina B, zapisujeme $|A| = |B|$, právě když existuje *bijektivní zobrazení* množiny A na množinu B.

Poznámka: Množina je nekonečná, právě když má stejnou mohutnost jako některá její *vlastní* podmnožina,
tedy právě když existuje bijektivní zobrazení mezi množinou a její vlastní podmnožinou.

Dirichletův neboli přihrádkový princip

Nechť A, B jsou dvě konečné množiny, počty jejich prvků jsou $|A| = m$, $|B| = n$.
Nechť f je zobrazení množiny A do množiny B, tedy $f : A \to B$.
Potom platí:

- Jestliže $m > kn$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$, pak v množině B existuje aspoň jeden prvek, na nějž se zobrazí více než k prvků množiny A.
- Jestliže $m < kn$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$, pak v množině B existuje aspoň jeden prvek, na nějž se zobrazí méně než k prvků množiny A.

Dirichletův neboli přihrádkový princip

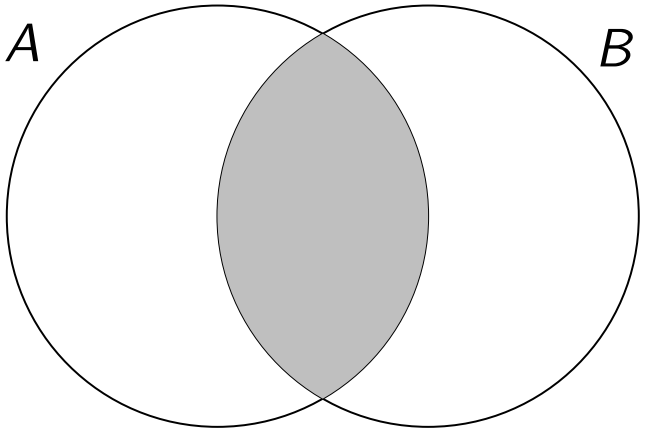
Dirichletův princip lze formulovat i takto:
Rozdělíme-li $m > kn$ předmětů do n přihrádek,
pak aspoň v jedné přihrádce bude více než k předmětů.
Rozdělíme-li $m < kn$ předmětů do n přihrádek,
pak aspoň v jedné přihrádce bude méně než k předmětů.

Nejjednodušší je speciální případ pro $k = 1$:
Rozdělujeme předměty do přihrádek.
Je-li více předmětů, skončí v některé přihrádce víc než jeden předmět,
je-li více přihrádek, zůstane některá přihrádka prázdná.

Operace na množinách – průnik

Průnik množin A, B je množina jejich *společných* prvků,
tj. prvků, které se vyskytují *zároveň* v množině A i v množině B.

$$A \cap B = \{x;\ x \in A \ \wedge \ x \in B\}$$

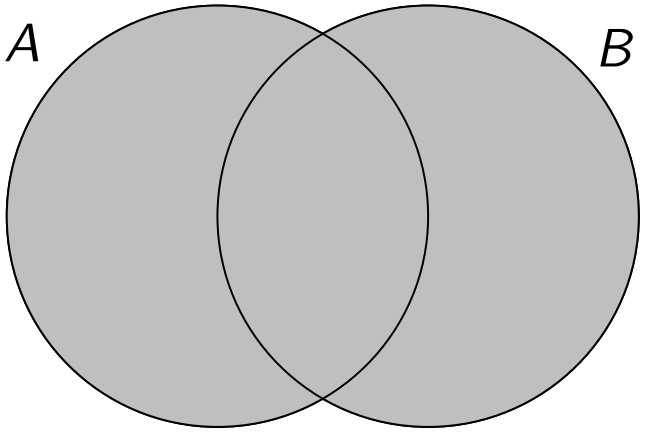


Pro *disjunktní* množiny A, B platí $A \cap B = \varnothing$.

Operace na množinách – sjednocení

Sjednocení množin A, B je množina prvků, které se vyskytují *aspoň v jedné* z množin A, B.

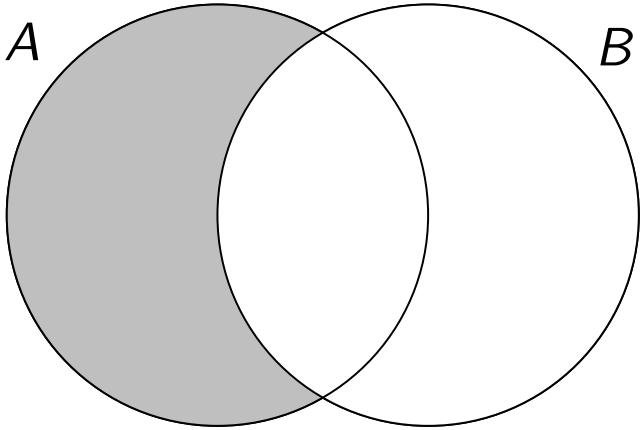
$$A \cup B = \{x;\ x \in A \ \vee \ x \in B\}$$



Operace na množinách – rozdíl

Rozdíl mezi množinami A, B, značený $A - B$,
je množina prvků, které se vyskytují v množině A a nevyskytují se v množině B.

$$A - B = \{x \in A;\ x \notin B\}$$



Operace na množinách – universální nadmnožina

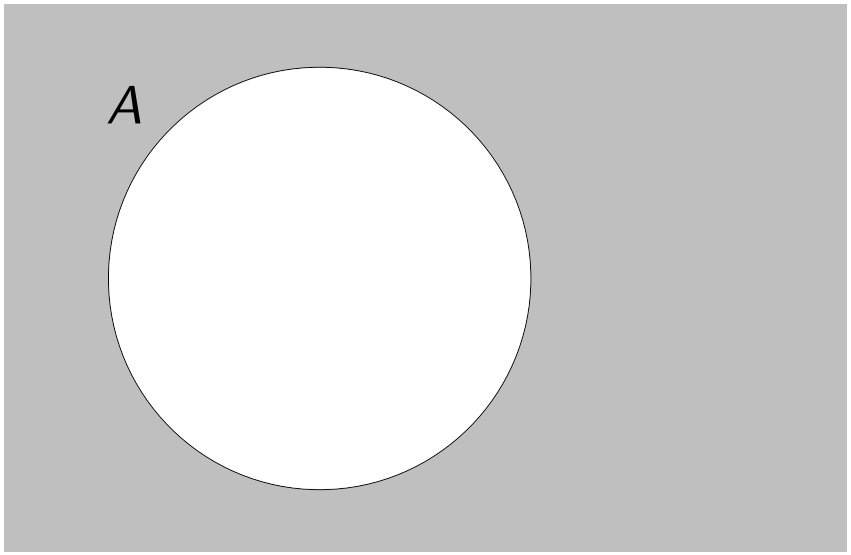
Je-li U taková množina, že všechny množiny, s nimiž pracujeme, jsou jejími podmnožinami, pak se U nazývá *universum*.

Například pracujeme-li jen s množinami reálných čísel, je universem množina $\mathbb{R}$ všech reálných čísel.

Operace na množinách – doplněk

Je-li U universum a $A \subseteq U$, pak
rozdíl $U - A$ se nazývá *doplněk* množiny A a značí se A'.

$$A' = U - A = \{x;\ x \notin A\}$$



Operace na množinách – doplněk

Například doplněk intervalu v množině všech reálných čísel:
$\langle 0, 1\rangle' = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

Doplněk množiny $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$ je množina všech iracionálních čísel.

Mezi rozdílem a průnikem množin platí vztah

$$A - B \;=\; A \cap B'$$

Množina všech podmnožin

Pro vytvoření množiny všech podmnožin dané množiny se používá operátor $\wp$.

$$\wp A = \{B;\ B \subseteq A\}$$

Například
$\wp\{1, 2\} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$,
$\wp\{a\} = \{\varnothing, \{a\}\}$,
$\wp\varnothing = \{\varnothing\}$.

Vlastnosti množinových operací

Operace průniku a sjednocení dvou množin jsou *asociativní*

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \\ (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C)\end{aligned}$$

Operace průniku a sjednocení dvou množin jsou *komutativní*.

$$\begin{aligned}A \cap B &= B \cap A \\ A \cup B &= B \cup A\end{aligned}$$

Operace průniku a sjednocení dvou množin jsou *idempotentní*.

$$\begin{aligned}A \cap A &= A \\ A \cup A &= A\end{aligned}$$

Vlastnosti množinových operací

Prázdná množina je *neutrální prvek* operace sjednocení
a universum je *neutrální prvek* operace průniku.

$$\begin{aligned} A \cup \varnothing &= \varnothing \cup A = A \\ A \cap U &= U \cap A = A \end{aligned}$$

Prázdná množina a universum jsou navzájem svými doplňky.

$$\begin{aligned} \varnothing' &= U \\ U' &= \varnothing \end{aligned}$$

Vlastnosti množinových operací

Pro doplněk množiny A v universu U platí

$$\begin{aligned} A \cap A' &= \emptyset \\ A \cup A' &= U \end{aligned}$$

Doplněk doplňku množiny se rovná původní množině (tato vlastnost unární operace se nazývá *involuce*).

$$(A')' = A$$

Vlastnosti množinových operací

Operace průniku a sjednocení dvou množin jsou navzájem *distributivní*.

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

Pro průnik a sjednocení platí tzv. *De Morganovy zákony*.

$$\begin{aligned} (A \cap B)' &= A' \cup B' \\ (A \cup B)' &= A' \cap B' \end{aligned}$$

Princip inkluze a exkluze

Pro sjednocení dvou konečných množin platí
$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Pro sjednocení tří konečných množin platí
$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Obecně pro n konečných množin:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

Úlohy – zápis množiny

Vysvětlete, proč si jsou rovny množiny $\{1,2,3\}$ a $\{1,3,1,3,2\}$.

Úlohy – vlastnosti množinových operací

Ukažte následující rovnosti pomocí Vennových diagramů:

$$\begin{aligned} A - B &= B' - A' \\ (A \cap B) \cup A &= A \\ (A \cup B) \cap A &= A \end{aligned}$$

Úlohy – princip inkluze a exkluze

Kolik přirozených čísel od 1 do 42 je dělitelných 2, 3 nebo 7 ?

Úlohy – princip inkluze a exkluze

Ze 32 vybraných studentů
má 18 studentů zkoušku z angličtiny,
17 jich má zkoušku z francouzštiny
a 11 studentů má zkoušku z němčiny.
Zkoušku z angličtiny a francouzštiny má 8 studentů,
zkoušku z angličtiny a němčiny mají 4 studenti,
zkoušku z francouzštiny a němčiny má 5 studentů.
1 student nemá zkoušku ani z jednoho jazyka.
Určete počty studentů, kteří mají zkoušky jen z angličtiny, jen z francouzštiny atd.,
pro každou kombinaci jednoho, dvou nebo tří jazyků.
Řešte s pomocí Vennova diagramu pro tři množiny.

Úlohy – princip inkluze a exkluze

Máme čtyři množiny, A, B, C, D.
Každá z nich má 15 prvků.
Každé dvě množiny mají pětiprvkový průnik.
Každé tři množiny mají dvouprvkový průnik.
Průnik všech čtyř množin má jeden prvek.
Kolik prvků má sjednocení $A \cup B \cup C \cup D$?

Úlohy – mohutnosti množin

Kolik prvků má množina všech podmnožin množiny A, když množina A má n prvků?

Tj. kolik je $|\wp A|$, když $|A| = n$?

Úlohy – Dirichletův princip

V koši je 12 červených a 12 zelených ponožek stejné velikosti,
bez rozlišení na pravé a levé.
Vytahujeme z něj naslepo ponožky tak, abychom měli jistotu,
že vytáhneme dvě ponožky stejné barvy.
Kolik nejméně ponožek musíme vytáhnout?

Úlohy – Dirichletův princip

Konvexní šestnáctistěn má 9 vrcholů.
Dokažte, že existuje vrchol, z nějž vychází aspoň 6 hran.

Návod: Použijte Eulerův vztah pro počty vrcholů, hran a stěn konvexního mnohostěnu: $v - h + s = 2$.