

Číselné soustavy

Čísla se zapisují pomocí číslic. Existují různé způsoby, jak pomocí číslic vyjádřit číslo, ale nejčastější způsob zápisu čísel je pomocí běžné *desítkové soustavy*.

Poznámka: Přesněji: pomocí *desítkové* (zvané též *dekadické*) *poziční číselné soustavy*, v níž pozice číslice určuje řád.

Příklad:
$$\begin{array}{cccc} \mathbf{1} & \mathbf{7} & \mathbf{2} & \mathbf{9} \\ 10^3 & 10^2 & 10^1 & 10^0 \end{array} \quad = \quad \mathbf{1} \cdot 10^3 + \mathbf{7} \cdot 10^2 + \mathbf{2} \cdot 10^1 + \mathbf{9} \cdot 10^0$$

Základem desítkové soustavy je číslo 10 a tato soustava má deset číslic:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Místo základu 10 lze však použít libovolné jiné přirozené číslo větší než 1.

Když pracujeme s více než jednou číselnou soustavou, musíme rozlišovat, které číslo je zapsáno ve které soustavě.

- Základ soustavy zapíšeme jako index vpravo dole u čísla.
- Číslo zapsané bez indexu je implicitně v desítkové soustavě.
- Samotný základ v indexu zapisujeme desítkově.
- Výjimkou je případ, kdy je základ soustavy jasný z kontextu.

Příklad:

- $13_{10} = 1101_2$
- $13 = 1101_2$ – číslo bez indexu je implicitně desítkové
- číslo 13 je dvojkově 1101 – základ 2 je zřejmý z kontextu

Když pracujeme s počítačovými daty a používáme jen desítkovou a šestnáctkovou soustavu, existuje i jiná konvence. Základ soustavy se nepíše do indexu, ale rozlišuje se předponou:

- Čísla v desítkové soustavě se zapíší přímo, bez předpony
- Čísla v šestnáctkové soustavě mají předponu 0x

Tento způsob zápisu se používá hlavně v některých programovacích jazycích a v softwarové dokumentaci.

Například $0xFF = FF_{16} = 255$.

Cvičení: Sečtěte v šestnáctkové soustavě: $0x17 + 0xB + 0x1E$

Dvojková soustava

Také nazývaná *binární soustava*. Má základ 2 a dvě číslice, 0, 1.

Číslo 26 má ve dvojkové soustavě zápis 11010, protože

$$\mathbf{1\ 1\ 0\ 1\ 0}_2 = \mathbf{1} \cdot 2^4 + \mathbf{1} \cdot 2^3 + \mathbf{0} \cdot 2^2 + \mathbf{1} \cdot 2^1 + \mathbf{0} \cdot 2^0$$

$2^4\ 2^3\ 2^2\ 2^1\ 2^0$

Číslo 217 má ve dvojkové soustavě zápis 11011001, protože

$$\mathbf{1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1}_2 = \mathbf{1} \cdot 2^7 + \mathbf{1} \cdot 2^6 + \mathbf{0} \cdot 2^5 + \mathbf{1} \cdot 2^4 + \mathbf{1} \cdot 2^3 + \mathbf{0} \cdot 2^2 + \mathbf{0} \cdot 2^1 + \mathbf{1} \cdot 2^0$$

$2^7\ 2^6\ 2^5\ 2^4\ 2^3\ 2^2\ 2^1\ 2^0$

Čísla, která jsou uložena v paměti počítače a zpracovávána v aritmeticko-logické jednotce procesoru, jsou ve dvojkové soustavě.

Převod čísla ze dvojkové soustavy do desítkové

Sečteme mocniny dvojky. Každou umocníme na ten exponent, který odpovídá pozici, na níž je ve dvojkovém zápisu jednička.

$$\begin{aligned} &1010011_2 \\ &= 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 2^6 + 2^4 + 2^1 + 2^0 \\ &= 64 + 16 + 2 + 1 \\ &= 83 \end{aligned}$$

Cvičení: Převeďte z dvojkové soustavy do desítkové čísla: 101010, 1100100.

Cvičení: Máme číslo zapsané ve dvojkové soustavě.

Co musíme udělat s jeho zápisem, abychom je

- vynásobili dvěma,
- vydělili osmi,
- vynásobili číslem 2^k , kde $k \in \mathbb{Z}$?

Cvičení: Máme číslo zapsané v poziční číselné soustavě o základu z , $z \in \mathbb{N}$, $z > 1$.

Nechť $k \in \mathbb{N}$. Co znamená:

- Posunutí zapsaného čísla o k číslic doleva,
neboli posun řádové čárky v čísle o k pozic doprava?
Číslice za řádovou čárkou (mohou to být nuly) se posunují před čárku.
- Posunutí zapsaného čísla o k číslic doprava,
neboli posun řádové čárky v čísle o k pozic doleva?
Číslice před řádovou čárkou se posunují za čárku.

Necelá čísla ve dvojkové soustavě

Zapisujeme pomocí *řádkové čárky* umístěné mezi řád jednotek (2^0) a řád polovin (2^{-1}).

Číslo 3,325 ve dvojkové soustavě:

$$\underset{2^1}{\mathbf{1}} \underset{2^0}{\mathbf{1}}, \underset{2^{-1}}{\mathbf{0}} \underset{2^{-2}}{\mathbf{1}} \underset{2^{-3}}{\mathbf{0}} \underset{2^{-4}}{\mathbf{1}}_2 = \mathbf{1} \cdot 2^1 + \mathbf{1} \cdot 2^0 + \mathbf{0} \cdot 2^{-1} + \mathbf{1} \cdot 2^{-2} + \mathbf{0} \cdot 2^{-3} + \mathbf{1} \cdot 2^{-4}$$

Cvičení: Převeďte z dvojkové soustavy do desítkové čísla: 101,1001, 100,111.

Cvičení: Převeďte z dvojkové soustavy do desítkové čísla

$$x = 0,10101010\dots = 0,\overline{10}, \quad y = 0,001100110011\dots = 0,\overline{0011}.$$

Převod celého čísla z desítkové soustavy do dvojkové

Číslo dělíme dvěma pomocí celočíselného dělení se zbytkem.

Zbytek je dvojková číslice v nejnižším řádu 2^0 .

Podíl tvoří dvojkové číslo před nejnižším řádem.

Podíl opět dělíme dvěma se zbytkem.

Zbytek je dvojková číslice v řádu 2^1

a podíl je dvojkové číslo přede dvěma nejnižšími řády.

Postup opakujeme tak dlouho, až je podíl roven jedné.

V posledním kroku je podíl 0 a zbytek 1.

Získané zbytky tvoří číslice dvojkového čísla.

Počítali jsme je od nejnižších řádů, proto je do čísla zapíšeme od naposled spočteného zbytku k prvnímu.

$$13 = 2 \cdot 6 + \mathbf{1}$$

$$6 = 2 \cdot 3 + \mathbf{0}$$

$$3 = 2 \cdot 1 + \mathbf{1}$$

$$1 = 2 \cdot 0 + \mathbf{1}$$

1 1 0 1

Příklad:

$$37 = 2 \cdot 18 + \mathbf{1}$$

$$18 = 2 \cdot 9 + \mathbf{0}$$

$$9 = 2 \cdot 4 + \mathbf{1}$$

$$4 = 2 \cdot 2 + \mathbf{0}$$

$$2 = 2 \cdot 1 + \mathbf{0}$$

$$1 = 2 \cdot 0 + \mathbf{1}$$

$$37 = 100101_2$$

$$18 = 10010_2$$

$$9 = 1001_2$$

$$4 = 100_2$$

$$2 = 10_2$$

$$1 = 1_2$$

Cvičení: Převeďte z desítkové do dvojkové soustavy čísla 27, 64, 183.

Trojková soustava

Také zvaná *ternární soustava*. Má základ 3 a tři číslice, 0, 1, 2.

Číslo 26 má ve trojkové soustavě zápis 222_3 , protože

$$\begin{array}{cccc} 2 & 2 & 2 & _3 \\ 3^2 & 3^1 & 3^0 & \end{array} = 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$$

Číslo 177 má ve trojkové soustavě zápis 20120_3 , protože

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & _3 \\ 3^4 & 3^3 & 3^2 & 3^1 & 3^0 & \end{array} = 2 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0$$

Cvičení:

Převeďte z trojkové do desítkové soustavy čísla 22_3 , 201_3 , 1201_3 , 1000000_3 .

Převeďte z desítkové do trojkové soustavy čísla 34, 75, 146, 520.

Osmičková soustava

Také zvaná *oktalová*. Má základ 8 a osm číslic, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Číslo 26 má v osmičkové soustavě zápis 32, protože

$$\mathbf{32}_8 = \mathbf{3} \cdot 8^1 + \mathbf{2} \cdot 8^0$$

Číslo 225 má v osmičkové soustavě zápis 341, protože

$$\mathbf{341}_8 = \mathbf{3} \cdot 8^2 + \mathbf{4} \cdot 8^1 + \mathbf{1} \cdot 8^0$$

Cvičení: Převeďte z desítkové do osmičkové soustavy čísla 15, 50, 377.

Cvičení: Převeďte z osmičkové do desítkové soustavy čísla 62_8 , 153_8 , 10000_8 .

Převod mezi dvojkovou a osmičkovou soustavou

Příklad: Číslo 61 má ve dvojkové soustavě zápis $111\ 101_2$ a v osmičkové soustavě 75_8 .

$$\begin{aligned} \underset{2^5}{1} \underset{2^4}{1} \underset{2^3}{1} \underset{2^2}{1} \underset{2^1}{0} \underset{2^0}{1}_2 &= 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 4 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^0 \\ &= (4 + 2 + 1) \cdot 2^3 + (4 + 0 + 1) \cdot 2^0 \\ &= 7 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 \\ &= 75_8 \end{aligned}$$

Díky tomu, že $8 = 2^3$, můžeme trojice sousedních dvojkových číslic převádět přímo na osmičkové číslice.

Převod mezi dvojkovou a osmičkovou soustavou je snadný, protože $8 = 2^3$, neboli základ jedné soustavy je celou mocninou základu druhé soustavy. V takovém případě převádíme po číslicích osmičkového čísla: každá osmičková číslice odpovídá trojici dvojkových číslic. Dvojkové číslo rozdělujeme na trojice číslic zprava, nejlevější skupina číslic může vyjít kratší.

Příklad: $111\ 010\ 111\ 000\ 011_2 = 72703_8$

dvojková:	1 1 1	0 1 0	1 1 1	0 0 0	0 1 1
osmičková:	7	2	7	0	3

Osmičková soustava se používala k přehlednějšímu zápisu čísel uložených v počítači. Čísla jsou v počítači sice uložena ve dvojkové soustavě, ale po převodu ze dvojkové do osmičkové soustavy je jejich zápis kratší a čitelnější.

V novějších systémech ke stejnému účelu slouží šestnáctková soustava.

Cvičení: Převeďte čísla 532_8 , 377_8 z osmičkové soustavy do dvojkové.

Cvičení: Převeďte číslo 1011101001_2 ze dvojkové soustavy do osmičkové.

Šestnáctková soustava

Také zvaná *hexadecimální*.

Má základ 16 a šestnáct číslic, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

Číslo 26 má v šestnáctkové soustavě zápis 1A, protože

$$\mathbf{1A}_{16} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{16^1} + \mathbf{10} \cdot \mathbf{16^0}$$

Číslo 473 má v šestnáctkové soustavě zápis 1D9, protože

$$\mathbf{1D9}_{16} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{16^2} + \mathbf{13} \cdot \mathbf{16^1} + \mathbf{9} \cdot \mathbf{16^0}$$

Pro číslice větší než 9 používáme písmena ze začátku latinské abecedy.

Mohou se používat velká písmena A, B, C, D, E, F i malá písmena a, b, c, d, e, f .

Převod mezi dvojkovou a šestnáctkovou soustavou je opět snadný, protože $16 = 2^4$ a opět můžeme převádět po číslicích: každá šestnáctková číslice odpovídá čtveřici dvojkových číslic. Pozor, číslo vždy rozdělujeme na čtveřice od nejnižšího řádu, tj. zprava; nejlevější skupina tedy může vyjít kratší.

Příklad: $111\ 0101\ 1100\ 0011_2 = 75C3_{16}$

dvojková:

1 1 1

0 1 0 1

1 1 0 0

0 0 1 1

šestnáctková:

7

5

C

3

Cvičení:

Převeďte z desítkové do šestnáctkové soustavy čísla: 0 až 15, 37, 127, 255, 256.

Cvičení:

Převeďte ze šestnáctkové do dvojkové soustavy číslo $0x7AF05$.

Převeďte číslo $0x7AF05$ ze šestnáctkové do osmičkové soustavy.

Převeďte z dvojkové do šestnáctkové soustavy číslo 10110101011001110_2 .

Cvičení: Převeďte ze čtyřkové do šestnáctkové soustavy čísla 23222322_4 , 31323122_4 .

Cvičení: Převeďte ze dvaatřicítkové do šestnáctkové soustavy číslo $5BTJMQ_{32}$.

Poznámka: Princip seskupování k za sebou jdoucích číslic v soustavě o základu z do „makročíslic“ soustavy o základu z^k lze pozorovat i ve způsobu zapisování čísel v desítkové soustavě.

V desítkových číslech, která mají aspoň čtyři číslice (s výjimkou letopočtů), se číslice sdružují do trojic: 16 777 216.

Tato čísla lze chápat i jako čísla zapsaná v soustavě o základu $1000 = 10^3$, která má 1000 číslic 000, 001, ..., 999.

$$16\ 777\ 216 = \boxed{016}\ \boxed{777}\ \boxed{216} = 16 \cdot 1000^2 + 777 \cdot 1000^1 + 216 \cdot 1000^0$$

Poziční číselné soustavy o jiných základech

Dvanáctková soustava (*duodecimální*) se používala např. v Nepálu. V Evropě bylo její použití spíš okrajové, ale přežilo třeba v názvech *tucet*, *veletucet* apod.

Dvacítková soustava (*vigesimální*) se v některých civilizacích (Mayové, Keltové) používala buď místo desítkové, anebo vedle ní. Názvy číslovek v keltských jazycích se tvoří po dvacítkách a pozůstatky tohoto systému jsou i ve francouzských číslovkách 70 až 99.





Šedesátková soustava (*sexagesimální*) vznikla a používala se už ve starém Babylóně. Dodnes ji používáme při dělení hodiny na minuty a sekundy, a také u úhlových jednotek – stupňů, minut a vteřin.

Čtyřiašedesátková soustava (*tetrsexagesimální*). Vyskytuje se ve staročínské *Knize proměn*. Ale za zápis čísel v poziční soustavě o základu 64 lze také považovat kódování *Base64* binárních dat do alfanumerického textu, jímž se kódují přílohy k poštovním zprávám. (Číslice jsou 0, . . . , 9, A, . . . , Z, a, . . . , z, +, /.)

Cvičení: Které české slovo svědčí o (občasném) používání šedesátkové soustavy i u nás?

1 = ∇	16 = ◀∇∇∇	31 = ◀◀∇	46 = ◀◀∇∇∇
2 = ∇∇	17 = ◀∇∇	32 = ◀◀∇∇	47 = ◀◀∇∇∇
3 = ∇∇∇	18 = ◀∇∇∇	33 = ◀◀∇∇∇	48 = ◀◀∇∇∇∇
4 = ∇∇	19 = ◀∇∇∇∇	34 = ◀◀∇∇	49 = ◀◀∇∇∇∇
5 = ∇∇	20 = ◀◀	35 = ◀◀∇∇	50 = ◀◀
6 = ∇∇∇	21 = ◀◀∇	36 = ◀◀∇∇∇	51 = ◀◀∇
7 = ∇∇∇	22 = ◀◀∇∇	37 = ◀◀∇∇∇	52 = ◀◀∇∇
8 = ∇∇∇	23 = ◀◀∇∇∇	38 = ◀◀∇∇∇	53 = ◀◀∇∇∇
9 = ∇∇∇	24 = ◀◀∇∇	39 = ◀◀∇∇∇∇	54 = ◀◀∇∇∇
10 = ◀	25 = ◀◀∇∇	40 = ◀◀	55 = ◀◀∇∇
11 = ◀∇	26 = ◀◀∇∇∇	41 = ◀◀∇	56 = ◀◀∇∇∇
12 = ◀∇∇	27 = ◀◀∇∇∇	42 = ◀◀∇∇	57 = ◀◀∇∇∇
13 = ◀∇∇∇	28 = ◀◀∇∇∇	43 = ◀◀∇∇∇	58 = ◀◀∇∇∇
14 = ◀∇∇	29 = ◀◀∇∇∇∇	44 = ◀◀∇∇∇	59 = ◀◀∇∇∇∇
15 = ◀∇∇	30 = ◀◀◀	45 = ◀◀∇∇∇	

Babylonské číslice 1 až 59, 0 byla prázdné místo

0	1	2	3	4
	•	••	••••	•••••
5	6	7	8	9
	•	••	••••	•••••
10	11	12	13	14
	•	••	••••	•••••
15	16	17	18	19
	•	••	••••	•••••

Mayské číslice 0 až 19