MATURITA DES SECTIONS BILINGUES
FRANCO-TCHÈQUES ET FRANCO-SLOVAQUES

EXAMEN DE MATURITA BILINGUE

Année scolaire 2017-2018
Session de mai 2018

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
Durée : 4h

Le sujet est constitué de 4 exercices. Les quatre exercices sont obligatoires.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements constituent un objectif majeur pour les épreuves écrites de mathématiques et entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'emploi des instruments de dessin et de calcul, et l'utilisation du formulaire sont autorisés.

Le barème n'est donné qu'à titre indicatif.

Exercice n° 1
(sur 8,25 points)

PARTIE A
Soit la fonction g définie sur l´intervalle $]0;+\infty[$ par: $g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x$.
On admet que :

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty .$$

1) Étudier les variations de la fonction g sur l´intervalle $]0;+\infty[$.
2) Démontrer qu´il existe un unique réel α sur $]0;+\infty[$ tel que $g(x) = 0$.
   Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
3) En déduire le signe de la fonction g sur l´intervalle $]0;+\infty[$.

PARTIE B
On considère la fonction f définie sur l´intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}$.
On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d´un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. L'unité graphique : $2\ cm$.

1) Déterminer la limite de f en 0 et interpréter graphiquement ce résultat.
   Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2) Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.
3) En utilisant les résultats de la Partie A, dresser le tableau de variation de la fonction f.
4) Démontrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = 2x$ est asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.
5) Étudier la position relative de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite $(\mathcal{D})$.
6) Construire la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite $(\mathcal{D})$ avec soin et précision.

PARTIE C

On considère le domaine ω du plan compris entre la courbe $(\mathcal{C})$, l´asymptote oblique $(\mathcal{D})$ et la droite d´équation $x = 3$.

1) Justifier que l´aire du domaine ω est donnée par : $\mathcal{A} = \int_1^3 \frac{\ln x}{x^2} dx$.
2) Vérifier que la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = \frac{-\ln x - 1}{x}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
3) En déduire l´aire de ω exprimée en cm^2.

Exercice n° 2
(sur 4,5 points)

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On considère les points $A(-1; 2; 0)$, $B(1; 2; 4)$ et $C(-1; 1; 1)$.

1)
   a. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
   c. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$, arrondie au degré.
2) Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   a. Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

3) Soient $(\mathcal{P}_1)$ le plan d'équation $3x + y - 2z + 3 = 0$ et $(\mathcal{P}_2)$ le plan passant par O et parallèle au plan d'équation $x - 2z + 6 = 0$.
   a. Démontrer que le plan $(\mathcal{P}_2)$ a pour équation $x = 2z$.
   b. Démontrer que les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ sont sécants.
   c. Soit la droite $(\mathcal{D})$ dont un système d'équations paramétriques est
   $$\begin{cases} x = 2t \\ y = -4t - 3 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$
   Démontrer que $(\mathcal{D})$ est l'intersection des plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.

4) Démontrer que la droite $(\mathcal{D})$ coupe le plan (ABC) en un point I dont on déterminera les coordonnées.

Exercice n° 3
(sur 3,75 points)

QCM - Les questions de cet exercice sont indépendantes. Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Noter sur la copie la lettre correspondante à la réponse choisie et donner la justification de cette réponse. Une bonne réponse non justifiée ne rapportera que 0,25 point.

1) L'ensemble des solutions de l'équation $z^3 + (6 - i)z^2 + (25 - 6i)z - 25i = 0$ est:
   a) $\{i;\ -3 + 4i\}$
   b) $\{i;\ -3 + 4i;\ -3 - 4i\}$
   c) $\{-i;\ -3 + 4i;\ -3 - 4i\}$
   d) $\{i;\ -3 + 8i;\ -3 - 8i\}$
2) Soit le nombre complexe $z = \frac{-3}{1-i}$.
   a) $z = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)\right)$
   b) $z = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$
   c) $z = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$
   d) $z = \frac{3}{2}\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)\right)$
3) Soit le nombre complexe $z = \left(-\sqrt{3} - i\right)^{10}$.
   a) $\frac{-2\pi}{3}$ est un argument de z
   b) $\frac{2\pi}{3}$ est un argument de z
   c) $\frac{-\pi}{3}$ est un argument de z
   d) $\frac{\pi}{3}$ est un argument de z
4) Dans le plan complexe on donne le point C d'affixe i. L'écriture complexe de la rotation de centre C et d'angle $\frac{-\pi}{2}$ est :
   a) $z' = i\,z + i - 1$
   b) $z' = -i\,z + i + 1$
   c) $z' = -i\,z + i - 1$
   d) $z' = z + i$
5) À tout nombre complexe $z \neq 3$, on associe le nombre complexe z' défini par : $z' = \frac{z+5i}{z-3}$.
   L'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z'| = 1$ est :
   a) Un cercle de rayon 1.
   b) Une droite privée d'un point.
   c) Un cercle privé d'un point.
   d) Une droite.

Exercice n° 4
(sur 3,5 points)

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\, u_n + n - 1 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On définit la suite (v_n) par $v_n = 4u_n - 8n + 24$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer u_1 et u_2 et puis calculer v_0, v_1 et v_2.
2) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
3) Exprimer v_n en fonction de n.
4) En déduire u_n en fonction de n.
5) La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.