MATURITA DES SECTIONS BILINGUES
FRANCO-TCHÈQUES ET FRANCO-SLOVAQUES

EXAMEN DE MATURITA BILINGUE

Année scolaire 2015-2016
Session de mai 2016

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
Durée : 4h

Le sujet est constitué de 4 exercices. Les quatre exercices sont obligatoires.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements constituent un objectif majeur pour les épreuves écrites de mathématiques et entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'emploi des instruments de dessin et de calcul, et l'utilisation du formulaire sont autorisés.

Le barème n'est donné qu'à titre indicatif.

Exercice n° 1
(sur 9 points)

PARTIE A

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par: $g(x) = \frac{1}{2} + (-x^2 + x + 1)e^{-x}$.
On admet que

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = \frac{1}{2} \quad .$$

1. Démontrer que $g'(x) = e^{-x}(x^2 - 3x)$.
2. Étudier le signe de $g'(x)$.
   En déduire le tableau de variation de la fonction g.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique, que l'on notera α, dans $\mathbb{R}$.
   Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.
4. En déduire le signe de la fonction g.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{2} + (x^2 + x)e^{-x}$.

On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, d'unité graphique 1 cm.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2.
   a) Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = g(x)$.
   b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
3. Donner l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.
4.
   a) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.
   b) Étudier la position relative de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite (D).
5. Construire la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites (D) et (T) avec soin et précision.

PARTIE C

1. Vérifier que $F(x) = \frac{1}{4}x^2 + (-x^2 - 3x - 3)e^{-x}$ est une fonction primitive de la fonction f.
2. Hachurer le domaine du plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.
   Calculer l'aire $\mathcal{A}$, exprimée en cm^2, de ce domaine.

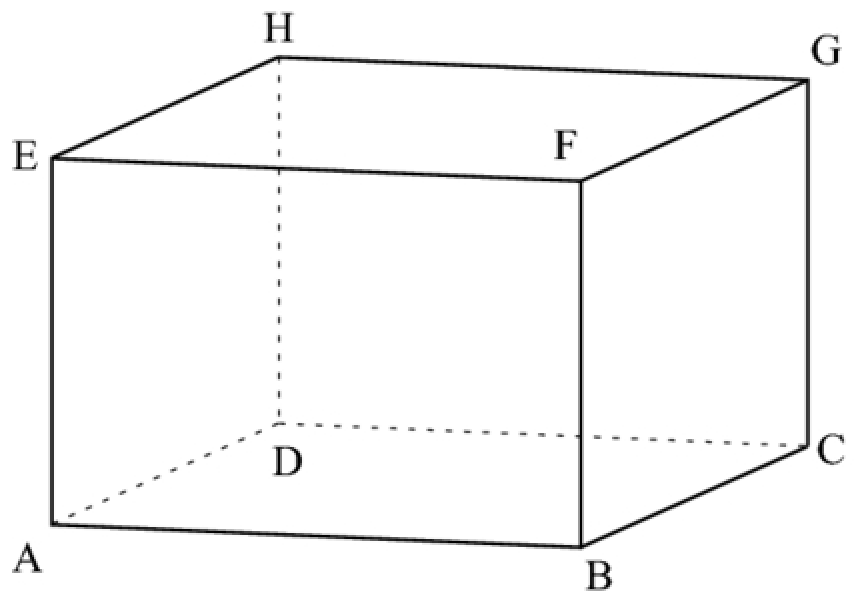
Exercice n° 2
(sur 4 points)

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que: $AB = 2$ et $BC = CG = 1$.

Le point I est le milieu du segment $[AB]$ et J celui du segment $[CG]$.

On considère le repère orthonormal $\left(A; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$. Dans ce repère, on a:

$$A(0;0;0), B(2;0;0), D(0;1;0), E(0;0;1), H(0;1;1), I(1;0;0) \text{ et } J\left(2;1;\frac{1}{2}\right).$$



1.

a) Montrer que le triangle DIJ est rectangle en I.

b) Calculer les longueurs DI et IJ.

c) Calculer l´aire du triangle DIJ.

2.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan (DIJ).

b) Calculer la distance du point H au plan (DIJ).

3. En utilisant les résultats des questions précédentes, calculer le volume du tétraèdre $HDIJ$.

On rappelle que le volume V du tétraèdre de base A et de hauteur h est $V = \frac{1}{3}A\,h$.

4. On admet que le plan (HDI) a pour équation $x + y - 1 = 0$.

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point J et perpendiculaire au plan (HDI).

b) Déterminer les coordonnées du point d´intersection P de la droite (d) et du plan (HDI).

Calculer la longueur du segment $[JP]$.

c) En utilisant le résultat de la question 3), déterminer l´aire du triangle HDI.

Exercice n° 3
(sur 5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique $2\ cm$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l´équation $2z^2 - 6z + 9 = 0$.

Dans la suite de l´exercice, on désigne par P, Q, et R les points d'affixes respectives:

$$z_P = \frac{3}{2}(1+i) \qquad z_Q = \frac{3}{2}(1-i) \qquad z_R = -2i\sqrt{3}\ .$$

2. Placer les points P, Q et R sur une figure que l´on complètera au fur et à mesure de la résolution de l´exercice.
3. On note S le symétrique du point R par rapport au point Q.
   Vérifier que l´affixe z_S du point S est $3 + i\left(2\sqrt{3} - 3\right)$.
4. Soit r la rotation de centre O et d´angle $\frac{\pi}{2}$.
   Déterminer les affixes z_A et z_C des points A et C, images respectives des points R et S par la rotation r.
5. On désigne par B et D les images respectives des points S et R par la translation de vecteur $3\vec{v}$.
   Calculer les affixes z_B et z_D des points B et D.
6. Vérifier par calcul que le point P est le milieu des segments $[AC]$ et $[BD]$.
7. Démontrer que $\frac{z_C - z_P}{z_B - z_P} = i$.
8. Déduire des questions 6 et 7 la nature du quadrilatère $ABCD$.

Exercice n° 4
(sur 2 points)

Partie A
Un lecteur d´une bibliothèque est passionné de romans policiers et de biographies.
Cette bibliothèque lui propose 150 romans policiers et 50 biographies.
40% des écrivains de romans policiers sont français et 70% des écrivains de biographies sont français.
Le lecteur choisit un livre au hasard parmi les 200 ouvrages.

Recopier le tableau et compléter d´après les informations données.

	Romans policiers	Biographies	Total
Écrivain français			
Écrivain non français			
Total			200

Partie B
Cet exercice est un QCM de six questions. Chacune comporte trois réponses, une seule est exacte.
On notera sur la copie la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier est:
   a) 0,4 b) 0,75 c) $\frac{1}{150}$.

2. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier ou un livre d'un auteur français est:
   a) 0,925 b) 1,225 c) 0,3 .

3. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier d'un auteur français est:
   a) 1,15 b) 0,4 c) 0,3 .

4. La probabilité que le lecteur choisisse un livre d´un écrivain français est:
   a) 0,9 b) 0,7 c) 0,475 .

5. La probabilité que le livre choisi ne soit pas un roman policier et ne soit pas écrit par un auteur français est:
   a) 0,075 b) 0,25 c) 0,525 .

6. Le lecteur est venu 20 fois à la bibliothèque et, chaque fois, il a choisi un livre au hasard parmi les 200 ouvrages. La probabilité qu´il ait choisi au moins un roman policier est:
   a) $1-(0,25)^{20}$ b) 20x0,75 c) $0,75\text{x}(0,25)^{20}$.