MATURITA DES SECTIONS BILINGUES
FRANCO-TCHÈQUES ET FRANCO-SLOVAQUES

EXAMEN DE MATURITA BILINGUE

Année scolaire 2014-2015
Session de mai 2015

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
Durée : 4h

Le sujet est constitué de 5 exercices indépendants. Les cinq exercices sont obligatoires.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements constituent un objectif majeur pour les épreuves écrites de mathématiques et entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'emploi des instruments de dessin et de calcul, et l'utilisation du formulaire sont autorisés.

Le barème n'est donné qu'à titre indicatif.

Exercice n°1
(sur 3,5 points)

On a demandé à 360 personnes quelle était leur activité préférée entre la lecture, le cinéma et le sport.

- Il y avait 60% d´hommes.
- 25% des hommes préfère la lecture.
- Il y a autant d'hommes qui préfèrent le cinéma que le sport.
- Un tiers des femmes préfère la lecture et la moitié préfère le cinéma.

1) Recopier et compléter le tableau ci-dessous (aucune justification n'est demandée).

	Hommes	Femmes	Total
Cinéma			
Sport			
Lecture			
Total			360

Dans la suite de l´exercice les réponses seront données sous forme de fractions irréductibles.

On interroge une de ces personnes au hasard.
On note :

l'événement « La personne interrogée préfère la Lecture » par L,
l'événement « La personne interrogée préfère le Cinéma » par C,
l'événement « La personne interrogée est un Homme » par H.

2) Calculer les probabilités $p(H), p(C)$.
3) Exprimer par une phrase l'événement $H \cap L$.
   Calculer la probabilité $p(H \cap L)$.
4) Exprimer par une phrase l'événement $H \cup L$.
   Calculer la probabilité $p(H \cup L)$.
5) On choisit n personnes au hasard.
   Ce choix est assimilé à n tirages successifs indépendants avec remise.
   On note l'événement «Toutes les personnes interrogées sont des hommes» par M.
   Déterminer la valeur minimale de n pour que la probabilité de M soit strictement inférieure à $\frac{1}{20}$.

Exercice n°2
(sur 5 points)

Les deux parties sont indépendantes et peuvent être traitées individuellement.

Partie A:

1) Montrer que $z_0 = 2$ est une racine évidente du polynôme
$$P(z) = z^3 + 2\sqrt{3}\, i\, z^2 - 2z^2 - 4z - 4\sqrt{3}\, i\, z + 8.$$
2) Résoudre dans l´ensemble des nombres complexes l´équation
$$z^3 + 2\sqrt{3}\, i\, z^2 - 2z^2 - 4z - 4\sqrt{3}\, i\, z + 8 = 0.$$

Partie B:

Soit le plan complexe (P) muni d´un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d´unité graphique 2 cm. On note A, B, C les points d´affixes respectives $a = 2$, $b = -1 - i\sqrt{3}$, $c = 2 - 3i$.

1) Réécrire b sous forme exponentielle.
2) Construire les points A, B, C dans le plan (P). On complétera la figure au fur et à mesure de l´exercice.
3) Calculer $\frac{c-a}{b-a}$. En déduire la mesure de l'angle géométrique au sommet A du triangle ABC.
4) Soit r la rotation de centre A et d´angle $-\frac{\pi}{6}$.
   a) Donner l´écriture complexe de la rotation r.
   b) Déterminer l´affixe du point $C´$, l´image du point C par r. Placer C.
5) Que représente la droite (AC') pour le triangle ABC?

Exercice n°3
(sur 4 points)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3 - \frac{1}{u_n - 5} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{1}{u_n - 4}.$$

1) Calculer u_1, u_2, u_3.

2) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n < 4$.
3) Étudier la monotonie de la suite (u_n).
4) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.
5) Monter que (v_n) est une suite arithmétique de raison -1 et que $v_0 = \frac{-1}{3}$.
6) Exprimer v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n.
7) En utilisant le résultat de la question 7, retrouver la limite de la suite (u_n).

Exercice n°4
(sur 4,5 points)

Partie A

On considère l`espace muni d'un système orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ d´unité graphique 3 cm.
Soient $A(2; -3; 1)$, $B(3; 0; 3)$, $C(7; -2; -3)$, $V(-1; 2; 1)$ quatre points dans l´espace.

1) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2) Vérifier que $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-14; 14; -14)$.
3) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
4) Vérifier que les points A, B, C et V forment un tétraèdre, c'est-à-dire que le point V n'appartient pas au plan (ABC).
5) Calculer la distance du point V au plan (ABC) en cm et le volume du tétraèdre $ABCV$ en cm^3.
   Remarque: le volume du tétraèdre $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{A}.h$ *où* $\mathcal{A}$ *est l'aire d'une base du tétraèdre et h la hauteur du tétraèdre s'appuyant sur cette base.*

Partie B

1) Calculer les coordonnées du milieu T du segment $[AV]$.
2) Soit (P) le plan donné par l'équation cartésienne $3x - 5y - 4 = 0$.
   Vérifier que (P) est perpendiculaire au segment $[AV]$ et passe par T.
3) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection du plan (P) avec le plan (ABC).

Exercice n°5
(sur 8 points)

PARTIE A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -1 + (1-x)e^x$.

1) On admet que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, et $g'(x) = -xe^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, dresser le tableau de variation de g.
2) Justifier que $g(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x - 1 + (-x+2)e^x$.

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d´unité graphique $\boldsymbol{2cm}$.

1) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$.
3) Dresser le tableau de variation de f.
4) Soit la droite (Δ): $y = -x - 1$.
   a) Montrer que (Δ) est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ en $-\infty$.
   b) Etudier la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (Δ).
5) Écrire l´équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d´abscisse $x = 0$.
6) Montrer que dans l´intervalle $]1;2[$ l´équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α.
   Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
7) Construire $(\mathcal{C}_f)$, (T) et (Δ).

PARTIE C

Soit $A(t)$ l´aire du domaine du plan délimité par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, la droite (Δ) et les droites d´équations $x = t$ et $x = 2$ et, où t est un réel strictement inférieur à α.

1) En utilisant une intégration par parties, exprimer $A(t)$ en fonction de t.
2) Déterminer la limite de $A(t)$ lorsque t tend vers $-\infty$.