

Exercice n° 1
 (sur 9 points)

PARTIE A

Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par: $g(x) = \frac{1}{2} + (-x^2 + x + 1)e^{-x}$.

On admet que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{1}{2}.$$

- Démontrer que $g'(x) = e^{-x}(x^2 - 3x)$.

- Étudier le signe de $g'(x)$.

En déduire le tableau de variation de la fonction g .

- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique, que l'on notera α , dans \mathbb{R} .

Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.

- En déduire le signe de la fonction g .

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x}{2} + (x^2 + x)e^{-x}$.

On appelle (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, d'unité graphique 1 cm.

- Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

-

- Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = g(x)$.

- Dresser le tableau de variation de la fonction f .

- Donner l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

-

- Démontrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote oblique à la courbe (C) en $+\infty$.

- Étudier la position relative de la courbe (C) par rapport à la droite (D) .

- Construire la courbe (C) et les droites (D) et (T) avec soin et précision.

Exercice n° 1

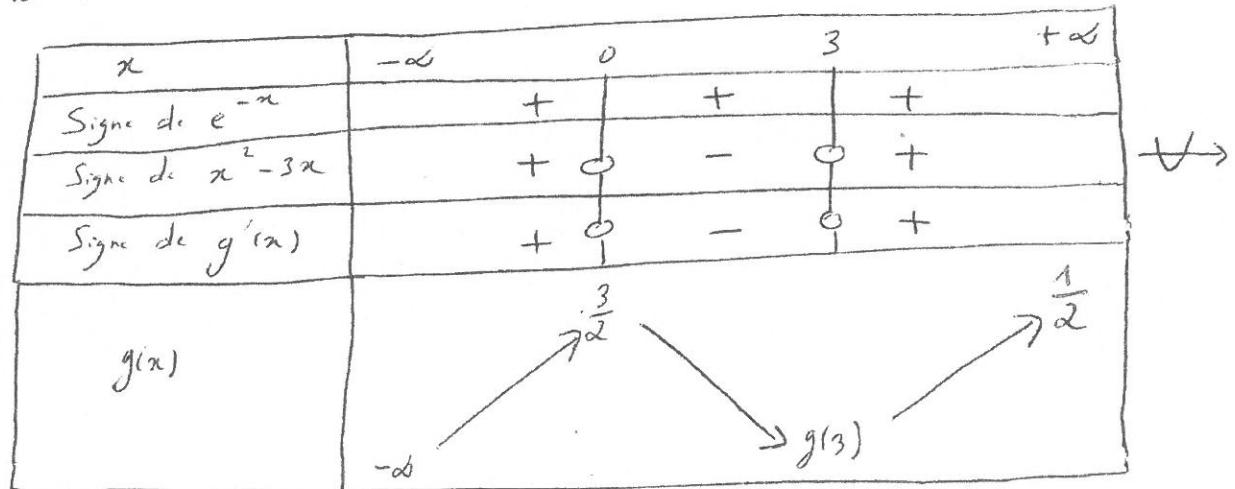
PARTIE A

$$\textcircled{1} \quad g'(x) = \left(\frac{1}{2} + (-x^2 + x + 1)e^{-x} \right)' = (-2x + 1)e^{-x} + (-x^2 + x + 1)e^{-x}(-1) \\ = e^{-x}(-2x + 1 + x^2 - x - 1)$$

$$g'(x) = e^{-x}(x^2 - 3x)$$

$$\textcircled{2} \quad e^{-x} > 0.$$

$$x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x-3) = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=3.$$



$$g(0) = \frac{1}{2} + (1)e^{-0} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$g(3) = \frac{1}{2} + (-3^2 + 3 + 1)e^{-3} = \frac{1}{2} + (-9 + 4)e^{-3} = \frac{1}{2} - \frac{5}{e^3}$$

③ (i) Pour $]-\infty; 0]$: $\begin{cases} g \text{ est strictement croissante sur }]-\infty; 0[\\ g \text{ est continue sur }]-\infty; 0[\text{ car elle y est dérivable} \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

$$g(0) = \frac{3}{2} > 0$$

d'où $g(x)=0$ admet une unique solution dans $]-\infty; 0[$.

Pour $[0; +\infty[$: g est minorée par $g(3) = \frac{1}{2} - \frac{5}{e^3} > 0$

d'où $g(x)=0$ n'admet aucune solution $[0; +\infty[$.

(Conclusion : l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution dans \mathbb{R} .)

(ii) On a $g(-0,8) < 0$ et $g(-0,7) > 0$.

De là : $-0,8 < x < -0,7$.

(4)

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Sign de $g(x)$	-	0	+

PARTIE B

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \frac{x}{2} + (x^2 + x)e^{-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2} + (x^2 + x)e^{-x} \right) = +\infty$$

$\rightarrow +\infty \quad \rightarrow 0 \quad \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{2} + (x^2 + x)e^{-x} \right) \quad (\text{on a une indétermination})$$

$\rightarrow -\infty \quad \rightarrow +\infty \quad \rightarrow +\infty$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^2 \left(\frac{1}{2x} + \left(1 + \frac{1}{x} \right) e^{-x} \right) \right) = +\infty$$

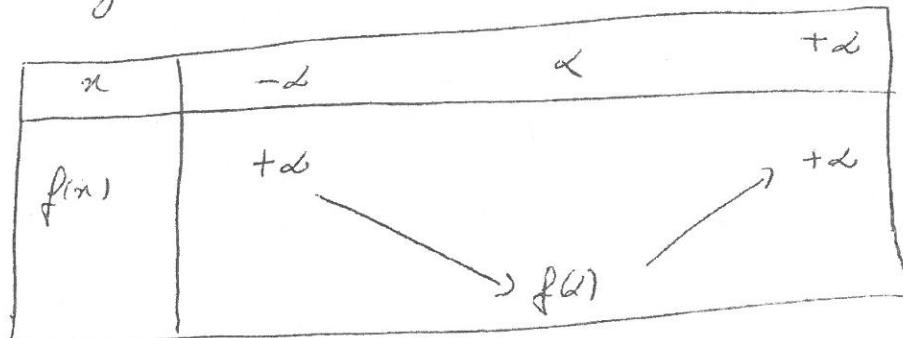
$\rightarrow +\infty \quad \rightarrow 0 \quad \rightarrow +\infty \quad \rightarrow +\infty$

$$\textcircled{2} \quad f'(x) = \left(\frac{x}{2} + (x^2 + x)e^{-x} \right)' = \frac{1}{2} + (2x+1)e^{-x} + (x^2+x)e^{-x}(-1)$$

$$= \frac{1}{2} + (2x+1-x^2-x)e^{-x} = \frac{1}{2} + (-x^2+x+1)e^{-x}$$

$$= g(x)$$

(b)



$$\textcircled{3} \quad (\Gamma) : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$f(0) = 0 + 0 = 0$$

$$f'(0) = g(0) = \frac{3}{2}$$

$$(\Gamma) : y = \frac{3}{2}x$$

$$\textcircled{4} \quad \textcircled{a} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left(\frac{x}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cancel{(x^2 e^{-x})} + \cancel{(x e^{-x})} = 0$$

Par conséquent, (D) est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

$$\textcircled{5} \quad \text{Soit } d(x) = f(x) - \frac{x}{2}.$$

$$d(x) = (x^2 + x)e^{-x} = x(x+1)e^{-x}$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
Signe de $x(x+1)$	+	0	-	0+
Signe de e^{-x}	+	+	+	+
Signe de $d(x)$	+	0	-	0+

↗

(C) est strictement au-dessus de (D) sur $]-\infty; -1] \cup [0; +\infty[$.

(C) est strictement en dessous de (D) sur $]-1; 0[$.

(C) et (D) admettent 2 points d'intersection en -1 et en 0.

(5)

